

ამოზნეილ სიმრავლეთა სისტემისათვის გეომეტრიული
ექსტრემალური ამოცანების ტოპოლოგიური გამოკვლევა

ნათია საზანდრიშვილი

სადისერტაციო ნაშრომი წარდგენილია ილიას სახელმწიფო უნივერსიტეტის
ბიზნესის, ტექნოლოგიისა და განათლების ფაკულტეტზე მათემატიკის
დოქტორის აკადემიური ხარისხის მინიჭების მოთხოვნების შესაბამისად

სადოქტორო პროგრამა: მათემატიკა

სამეცნიერო ხელმძღვანელი: გიორგი ხიმშიაშვილი, პროფესორი

ილიას სახელმწიფო უნივერსიტეტი
თბილისი, 2024

განაცხადი

როგორც წარდგენილი სადისერტაციო ნაშრომის ავტორი, ვაცხადებ, რომ ნაშრომი წარმოადგენს ჩემს ორიგინალურ ნამუშევარს და არ შეიცავს სხვა ავტორების მიერ აქამდე გამოქვეყნებულ, გამოსაქვეყნებლად მიღებულ ან დასაცავად წარდგენილ მასალებს, რომლებიც ნაშრომში არ არის მოხსენიებული ან ციტირებული სათანადო წესების შესაბამისად.

ნათია საზანდრიშვილი -----24.08.2024

აბსტრაქტი

დისერტაციის პირველ ნაწილში განხილულია რიგი გეომეტრიული ექსტრემალური ამოცანა სიბრტყის რამდენიმე არათანამკვეთ წრეწირზე წერტილთა კონფიგურაციისთვის. არათანამკვეთი წრეწირების სისტემების შესწავლა მოტივირებულია, კერძოდ, გრაფთა თეორიის, დისკრეტული გეომეტრიის და გამოყენებითი ტოპოლოგიის რამდენიმე აქტუალური ამოცანით [32]. არათანამკვეთი წრეწირებისთვის შევისწავლეთ მინიმალური მაკავშირებელი ციკლის ამოცანა და მორსის თეორია პერიმეტრის ფუნქციისთვის. კერძოდ, შესწავლილია სტაციონარული მაკავშირებელი ციკლები კონცენტრული წრეწირებისთვის. ექსტრემალური ამოცანები კონცენტრული წრეწირებისთვის მოტივირებულია, კერძოდ, ნილს ბორის მიერ ჩამოყალიბებული ე.წ. ატომის პლანეტარული მოდელის შესწავლით [9] და ბილიარდის ტიპის დინამიური სისტემების პერიოდული ტრაექტორიების შესწავლით [18]. ამ თემატიკაში მთავარი ყურადღება ეთმობა პერიმეტრის კრიტიკულ წერტილებს, რომლებიც განიხილება, როგორც ფუნქცია კონცენტრული წრეწირების ნამრავლზე. ამ შემთხვევისთვის დავამტკიცეთ, რომ ტიპური რადიუსებისთვის გაწრფელებული კონფიგურაციები არიან პერიმეტრის არაგადაგვარებული კრიტიკული წერტილები და გარკვეულ შემთხვევებში მივიღეთ ფორმულები მათი მორსის ინდექსებისთვის. როდესაც წრეწირების რაოდენობა არ აღემატება ოთხს, მოცემულია რამდენიმე შედეგი პერიმეტრის და ორიენტირებული ფართობის სტაციონარული კონფიგურაციების ფორმის შესახებ, რომლებიც აზოგადებენ ე. გუტკინის (E. Gutkin) ანალოგიურ შედეგებს სამი კონცენტრული წრეწირის შემთხვევაში [18].

დისერტაციის მეორე ნაწილში დეტალურადაა შესწავლილი ფეინმანის მაშველის ამოცანის სახელწოდებით ცნობილი პრობლემის [30] ნაშრომში მიღებული ანალიზური ამოხსნა და ამ პრობლემის რამდენიმე განზოგადება

მოძრავი სამიზნე ობიექტის შემთხვევისთვის. ამ მიზნისთვის განვითარებულ იქნა მათემატიკური ფიზიკის ე.წ. იზოქრონების მეთოდის სპეციალური ვერსია, რომელიც ეყრდნობა გეომეტრიულ ოპტიკაში ცნობილი ჰიუგენსის პრინციპიდან [31] გამომდინარე იზოქრონის ინტერპრეტაციას, როგორც წრეწირთა სისტემის მომვლების. ამ მეთოდის გამოყენებით მიღებულია იზოქრონების პარამეტრული განტოლებები, გამოთვლილია იზოქრონების სიმრუდე და დამტკიცებულია მათი ამოზნექილობა. ამის საფუძველზე მიღებულია მაშველის ამოცანის რამდენიმე განზოგადების ანალიზური ამოხსნები, რომლებიც აზოგადებენ [30] ნაშრომში მიღებულ კლასიკური მაშველის ამოცანის ანალიზურ ამოხსნას და პ. ვაშის (P. Wasz) [42] ნაშრომის ზოგიერთ შედეგს.

ძირითადი საძიებო სიტყვები: პერიმეტრი, ორიენტირებული ფართობი, ექსტრემალური კონფიგურაცია, მორსის ინდექსი, მაშველის ამოცანა, სნელიუსის კანონი, ოპტიმალური ტრაექტორია, იზოქრონა, მომვლები.

საგნობრივი კლასიფიკატორები MSC 2020: 49N75, 53A04

Abstract

The first part of the thesis is concerned with several geometric extremal problems for configurations of points on finite systems of non-intersecting circles in the plane. The study of systems of non-intersecting circles in the plane is motivated, in particular, by a number of topical problems of graph theory, discrete geometry and applied topology [32]. For non-intersecting circles, we presented results on the problem of minimal connecting cycle and Morse theory of perimeter and oriented area. In particular, we investigated the stationary connecting cycles for concentric circles. Extremal problems for concentric circles are motivated, in particular, by the planetary model of atom suggested by N. Bohr

[9] and by the investigation of periodic trajectories of certain dynamical systems of billiard type [18]. Considerable attention in such topics is given to the critical points of perimeter and similar geometric quantities considered as functions on the product of concentric circles. Concerning this problem, we proved that the aligned configurations are critical points of perimeter which are non-degenerate for typical collections of radii, and in some cases computed their Morse indices. If the number of concentric circles does not exceed four, we presented several results on the shape of stationary configurations of perimeter and oriented area which generalize analogous results of E. Gutkin for three concentric circles [18].

The second part of the thesis is concerned with generalizations of an extremal problem known as Feynman's Lifeguard Problem and of its analytic solution given in [30] to the situations with moving target object. For this purpose, we developed an approach to this problem based on the concept of isochrone and its representation as an envelope of a system of circles based on the Huygens principle of geometric optics [31]. Using this approach, we obtained the parametric equations of an isochrone, computed its curvature and proved that it is a convex curve. Based on these results we obtained analytic solutions to several generalizations of the Feynman's Lifeguard Problem, which generalize the analytic solution given in [30] and some results of P. Wasz's thesis [42].

Key Words: perimeter, oriented area, extremal configuration, Morse index, lifeguard problem, Snell's law, optimal trajectory, isochrone, envelope.

Classification codes MSC 2020: 49N75, 53A04

მადლობა

მადლობას ვუხდით სადისერტაციო ნაშრომის ხელმძღვანელს, ბატონ გიორგი ხიმშიაშვილს ნაშრომზე მუშაობის განმავლობაში გაწეული დახმარებისთვის, რჩევებისთვის, სირთულეების დაძლევაში მხარში დგომისთვის, შთაგონებისთვის.

მადლობას ვუხდით შოთა რუსთაველის საქართველოს ეროვნულ სამეცნიერო ფონდს (SRNSFG) სადოქტორო კვლევის PHDF-22-3325 გრანტით დაფინანსებისთვის.

სარჩევი

თავი 1. შესავალი.....	1
1.1. გეომეტრიული ექსტრემალური ამოცანების მოკლე მიმოხილვა	1
1.2. ნაშრომის სტრუქტურა	5
თავი 2. ოპტიმალური მაკავშირებელი ციკლები წრეწირთა სიმრავლისთვის	7
2.1. ექსტრემალური ამოცანები მაკავშირებელი ციკლებისთვის	14
2.2. ექსტრემალური მაკავშირებელი ციკლები კონცენტრული წრეწირებისთვის	21
2.2.1. პერიმეტრის ექსტრემუმები სამი კონცენტრული წრეწირისთვის	26
2.2.2. პერიმეტრის ექსტრემუმები ოთხი კონცენტრული წრეწირის შემთხვევაში	30
2.3. მაკავშირებელი ციკლების ორიენტირებული ფართობის ექსტრემუმები	39
თავი 3. ფეინმანის მაშველის ამოცანის განზოგადების შესახებ	47
3.1. მაშველის ამოცანის ზოგადი ანალიზური ამოხსნა.....	50
3.2. მაშველის ამოცანის კერძო შემთხვევები.....	51
3.3. მაშველის განზოგადებული ამოცანა და იზოქრონები.....	53
3.4. სამაშველო დიაპაზონი და გადარჩენის არეები.....	58
3.5. ოპტიმალური სტრატეგიები მაშველის განზოგადებულ ამოცანაში.....	59
3.6. მაშველი და სამიზნე ობიექტი ერთსა და იმავე გარემოში	62
3.7. იზოქრონების მეთოდით მოძრავი გადასარჩენი ობიექტის სიტუაციაში	65
თავი 4. დასკვნა.....	70
ლიტერატურა	72

თავი 1. შესავალი

1.1. გეომეტრიული ექსტრემალური ამოცანების მოკლე მიმოხილვა

ექსტრემალური ამოცანები – ამოცანები მაქსიმუმებსა და მინიმუმებზე ყოველთვის იპყრობდა მეცნიერთა ყურადღებას. ამა თუ იმ ექსტრემალური ამოცანის ამოხსნისას წარმოიშობოდა და ვითარდებოდა ახალი თეორიები, ზოგჯერ კი მათემატიკის ახალი მიმართულებები.

ექსტრემალური ამოცანები ყოველდღიური ცხოვრებიდან მომდინარეობენ. მაქსიმუმები და მინიმუმები მუდმივად წარმოიქმნებიან ინჟინრულ გამოთვლებში, არქიტექტურაში, ეკონომიკაში. გარდა ამისა, ექსტრემალური ამოცანები ფართო გამოყენებას პოულობენ ფიზიკაში, ქიმიაში, ბიოლოგიაში. გარე სამყარო მოწყობილია ექსტრემალური კანონებით. ამას ადასტურებს ლეონარდ ეილერის (1707 – 1783) სიტყვები: „სამყაროში არაფერი ხდება, რაშიც არ ჩანს რაიმე მაქსიმუმის ან მინიმუმის არსი“. ექსტრემალური ამოცანების დახმარებით შესაძლებელია ეფექტურად მოიძებნოს და შედგეს მათემატიკური მოდელები და გამოკვლეულ იქნას მათი ქცევა სხვადასხვა რთული მექანიკური და ფიზიკური პროცესებისათვის ([3],[11], [14], [18], [28], [33], [47]).

საკვლევი თემა „ამოზნეპილ სიმრავლეთა სისტემისათვის გეომეტრიული ექსტრემალური ამოცანების ტოპოლოგიური გამოკვლევა“ გულისხმობს ამოზნეპილ სიმრავლეთა სისტემებთან ასოცირებული მრავალკუთხედების ექსტრემალური პერიმეტრებისა და ფართობების გამოთვლას, მინიმუმის, მაქსიმუმისა და უნაგირის ტიპის კრიტიკული წერტილების რაოდენობების დადგენას. ასეთი ტიპის სიტუაციები ხშირად ჩნდება გრაფთა თეორიაში, არაწრფივ ანალიზში და მათემატიკურ ფიზიკაში ([2], [3], [42], [48]). მაგ.: ე.წ. მინიმალური კონექტორის ამოცანა დაკავშირებულია ისეთ კლასიკურ ცნებასთან, როგორიცაა შტაინერის მინიმალური ქსელი (იხ. [33], [42]).

თანამედროვე ეტაპზე ასეთი ამოცანები გამოიყენება ტელეკომუნიკაციის სისტემებსა და ელექტრონული სქემების პროექტირებაში.

ამოცანის კერძო შემთხვევები შესწავლილია ი. შტაინერის, ვ. ბლაშკეს, რ. კურანტის, ე. ხადვიგერის და სხვა მკვლევართა ნაშრომებში. კერძოდ, ე.წ. შტაინერის მინიმალური ქსელების თეორია გადმოცემულია რ. კურანტისა და ჰ. რობინსის კლასიკურ წიგნში „რა არის მათემატიკა?“, ი. პაკის თანამედროვე მონოგრაფიაში [32] და სპეციალიზებულ ჟურნალებში გამოქვეყნებულ მრავალ ნაშრომში.

ჩვენი კვლევის მიზანია კრიტიკული წერტილების რაოდენობის დადგენა, მათი მორსის ინდექსების პოვნა და ექსტრემალური მნიშვნელობების გამოთვლა. წარდგენილ ნაშრომში განხილულია ზემოთხსენებული კლასიკური ამოცანების განზოგადება, რომელიც წარმოიქმნება თანამედროვე გამოყენებითი ამოცანების ორ სახეობასთან დაკავშირებით. კერძოდ, კონცენტრული წრეწირების შემთხვევაში ასეთი ამოცანები დაკავშირებულია ნ. ბორის ე.წ. ატომის პლანეტარულ მოდელთან (Bohr's 1913 atomic model), რომელმაც დიდი როლი შეასრულა ბირთვული ფიზიკის განვითარებაში ([9], [12], [41]) და ბილიარდის ტიპის დინამიური სისტემების პერიოდული ტრაექტორიების შესწავლასთან [8], [18].

არათანმკვეთი წრეწირების შემთხვევაში ასეთი ტიპის ამოცანები წარმოიშვა, კერძოდ, ე.წ. „მდგრადი ჰომოლოგიის“ („persistent homology“) თეორიასთან დაკავშირებით ([28]), სადაც არსებით როლს თამაშობენ დისკების სისტემები, რომელთა ცენტრები ფიქსირებულია, რადიუსები კი იზრდება ნულიდან უსასრულობამდე. მდგრადი ჰომოლოგიის ჯგუფები განისაზღვრება ამ ზრდადი დისკების თანაკვეთების დინამიკის ანალიზის საფუძველზე. ეს თეორია აქტიურად გამოიყენება მონაცემთა ტოპოლოგიური ანალიზის ამოცანებში [32] და ე.წ. მრავალნაირობების სწავლების („manifold learning“) თეორიაში.

ორივე ტიპის ამოცანაში საჭირო აღმოჩნდა წერტილთა სასრული სიმრავლეების მაგივრად არათანამკვეთი (დიზიუნქტურული) წრეწირების ან დისკების სისტემების განხილვა. წრეწირთა სასრული სიმრავლეების რამდენიმე მნიშვნელოვანი თვისების აღწერა და შესწავლა შესაძლებელია მათი კონფიგურაციული სივრცეების ტერმინებში, რომლებიც მრავალგანზომილებიანი ტორების ჰომეომორფულია. კერძოდ, ექსტრემალური ამოცანები წრეწირებზე და სხვა ორგანზომილებიან ამოხსენილ სიმრავლეებზე, ბუნებრივად აღიწერება, როგორც მრავალგანზომილებიან ტორებზე განსაზღვრული დიფერენცირებადი ფუნქციების კრიტიკული წერტილების ტოპოლოგიური თვისებების ტერმინებში.

ტორებზე განსაზღვრული ფუნქციების კრიტიკული წერტილების შესწავლისთვის გამოიყენება რამდენიმე კლასიკური ტოპოლოგიური ცნება და მეთოდი ([10], [17], [25], [37]), კერძოდ, ლიუსტერნიკ-შნირელმანის კატეგორია, მორსის თეორია, დიფერენციალური ტოპოლოგია და განსაკუთრებულობათა თეორია. ამ ტერმინებში შესაძლებელია ექსტრემალური ამოცანების ისეთი ტიპის ფუნქციების გამოკვლევა, როგორებიცაა პერიმეტრის, ორიენტირებული ფართობის, ჰუკის ენერგიის და კულონის ენერგიის ტიპის ფუნქციები, რაც ქმნის ბუნებრივ ჩარჩოს და მიდგომებს დისერტაციაში წარდგენილი ძირითადი ამოცანების შესწავლისთვის.

აღსანიშნავია, რომ ლიტერატურა ასეთი ტიპის თანამედროვე ამოცანების შესახებ საკმაოდ მცირერიცხოვანია [12], [32]. ამიტომ, აქტუალურად გამოიყურებოდა ამ თემის მომდევნო განვითარება და ამ მიმართულებით რამდენიმე ნაბიჯი გაკეთებულია დისერტაციის პირველ ნაწილში.

დისერტაციის მეორე ნაწილში განხილული ამოცანები ჩნდება ოპტიმალური მართვის თეორიის ე.წ. დევნის ამოცანებში, რომლებსაც ინგლისურად რამდენიმე ტერმინი შეესაბამება, ისეთები, როგორც “differential games”, “pursuit problems”, “chase and escape problems” ([7], [34], [43]). ამ ამოცანების კლასიკურ ვარიანტებში განიხილება ორი მოძრავი წერტილოვანი ობიექტი. პირველი ობიექტის მიზანია

„დაიჭიროს“ მეორე ობიექტი, ანუ მოახერხოს მეორე ობიექტისთვის გზის გადაჭრა, ე.წ. “intercept” [34]. ამ თეორიის განვითარების თანამედროვე ეტაპზე განიხილება ამოცანები, სადაც პირველი ობიექტის მიზანია, მიუახლოვდეს მეორე ობიექტს მოცემულ საკმაოდ მცირე მანძილზე [42]. ასეთ ამოცანებს უწოდებენ “pursuit problems with non-zero capture radius” [42]. მათ აქვთ ბევრი გამოყენება, მაგალითად, ე.წ. მაშველის ამოცანის ტიპის პრობლემებში, რომელთაგან ერთ-ერთი ცნობილია ფეინმანის ამოცანის სახელწოდებით [30] და განიხილება ამ დისერტაციის მესამე თავში. დისერტაციის ამ ნაწილში ჩვენი კვლევის მიზანია ფეინმანის მიერ ჩამოყალიბებულ ე.წ. მაშველის ამოცანის ([30]) განზოგადებაში გადარჩენის პროცესის მინიმალური დროის გამოთვლა, ე.წ. სნელიუსის წერტილების დადგენა და ოპტიმალური ტრაექტორიების აღწერა. იმ შემთხვევაში, როდესაც პირველი ობიექტის მიზანია, მიაღწიოს რამდენიმე უძრავ ობიექტს და დაბრუნდეს საწყის წერტილში, ამოცანა დაიყვანება ე.წ. „მინიმალური მაკავშირებელი ციკლის“ პოვნის ამოცანაზე, რომელიც განხილულია დისერტაციის მეორე თავში.

ამგვარად, დისერტაციაში შესწავლილი გეომეტრიული ექსტრემალური ამოცანები აქტუალურია და დაკავშირებულია რამდენიმე მნიშვნელოვან კლასიკურ ამოცანასთან.

ჩვენი გამოკვლევების არსებითი ახალი მომენტი ის, რომ ჩვენ განვიხილავთ არა მხოლოდ მინიმალურ ან მაქსიმალურ მაკავშირებელ ციკლს, არამედ ყველა სტაციონარულ მაკავშირებელ ციკლს, რომელშიც ნულდება სამიზნე ფუნქციის გრადიენტი. ასეთი მიდგომა საშუალებას გვაძლევს, გამოვიყენოთ ტოპოლოგიური მეთოდები, კერძოდ, მორსის თეორია და განსაკუთრებულობათა თეორია, რაც საკვლევი ამოცანების უფრო ღრმა და სრული გეომეტრიული შესწავლის შანსს გვაძლევს. იგივე ეხება მაშველის და დევნის ამოცანებს, რომლებიც განხილულია მესამე თავში. ამ კონტექსტში, მეორე თავში წარდგენილი კვლევის მიზანია, მოცემული სამიზნე ფუნქციის კრიტიკული

წერტილების რაოდენობის დადგენა, მათი მორსის ინდექსების პოვნა და ექსტრემალური მნიშვნელობების გამოთვლა.

1.2. ნაშრომის სტრუქტურა

სადისერტაციო ნაშრომის სტრუქტურა შემდეგნაირია: იგი შედგება სამი თავისგან. პირველი თავის პირველ პარაგრაფში მოკლედაა მიმოხილული გეომეტრიული ექსტრემალური ამოცანების ძირითადი საკითხები.

მეორე თავი ეძღვნება კონცენტრულ წრეწირთა სიმრავლეებისთვის მაკავშირებელი ციკლების გამოკვლევას და აღწერას, კრიტიკული წერტილების რაოდენობების დადგენას, მათი მორსის ინდექსების პოვნას და ექსტრემალური მნიშვნელობების გამოთვლას. დავადგინეთ, რომ სამი კონცენტრული წრეწირის შემთხვევაში პერიმეტრი და ორიენტირებული ფართობი არიან მორსის ფუნქციები და მისი ექსტრემუმები გამოისახება, როგორც ცხადი ფორმულებით მოცემული მრავალწევრთა ფესვები. მეორე თავი შედგება სამი პარაგრაფისგან. პარაგრაფ 2.1-ში განხილულია მინიმალური კონექტორის ცნობილი ამოცანის რამდენიმე კერძო შემთხვევა. პარაგრაფ 2.2-ში განხილულია სტაციონარული მაკავშირებელი ციკლის ამოცანა კონცენტრული წრეწირებისთვის, კერძოდ, სამი და ოთხი კონცენტრული წრეწირისთვის. პარაგრაფ 2.3-ში კი ნაჩვენებია, რომ ორიენტირებული ფართობი მორსის ფუნქციაა და წარმოდგენილია შედეგები სამი და ოთხი კონცენტრული წრეწირებისთვის.

მესამე თავში განხილულია მაშველის ამოცანის სახელწოდებით ცნობილი ექსტრემალური ამოცანის რამდენიმე განზოგადება. კერძოდ, მივიღეთ ოპტიმალური გზის გეომეტრიულ აღწერას და შევადგენთ ალგორითმს გადარჩენის მინიმალური დროის გამოსათვლელად. მაშველის კლასიკურ ამოცანაში განხილულია ზედა და ქვედა ნახევარსიბრტყეები $H_{\pm} = \{\pm y > 0\}$ და ორი წერტილი $A(a; b) \in H_-$, $B(c; d) \in H_+$. ობიექტი („მაშველი“) იმყოფება A წერტილში, ხოლო გადასარჩენი პირი („მცურავი“) კი – B -ში. მაშველს შეუძლია მოძრაობა (სირბილი) H_- ნახევარსიბრტყეში w მაქსიმალური სიჩქარით, ამასთან,

მისი მოძრაობის (ცურვის) მაქსიმალური სიჩქარე H_+ -ში არის v , $0 < v < w$. არაფორმალური ინტერპრეტაციით, Ox ღერძი არის გამყოფი ხაზი ზღვასა და ხმელეთს შორის, H_- არის ხმელეთი, H_+ კი – ზღვა. საძიებელია A -დან B -მდე მისაღწევად საჭირო უმცირესი დრო. პარაგრაფ 3.1-ში მოყვანილია მაშველის ამოცანის ანალიზური ამოხსნა, ასევე განხილულია კერძო შემთხვევა. პარაგრაფ 3.2-ში კი ამოცანა განვიხილეთ იზოქრონების ტერმინებში მოძრავი სამიზნე ობიექტისთვის და დავადგინეთ, რომ მაშველის იზოქრონა ამოზნექილი წირია. პარაგრაფ 3.4-ში და 3.5-ში მიღებულ შედეგებს ვავსებთ სამაშველო დიაპაზონის განსაზღვრით. პარაგრაფ 3.6-ში დავადგინეთ, ერთსა და იმავე გარემოში მყოფი ორივე ობიექტისთვის მაშველის მოძრაობის რომელი ტრაექტორიაა ოპტიმალური. პარაგრაფ 3.7-ში გამოვიყენეთ ისევ იზოქრონების მეთოდი მოძრავი ობიექტის და არანულოვანი დაჭერის რადიუსის შემთხვევაში.

მე-4 თავში შეჯამებულია სადისერტაციო ნაშრომში მიღებული შედეგები და მოყვანილია ამ შედეგების საფუძველზე მომავალი კვლევის შესაძლებლობები.

სადისერტაციო ნაშრომს ერთვის გამოყენებული ლიტერატურის სია, რომელიც შედგება 51 დასახელების სახელმძღვანელოსგან.

თავი 2. ოპტიმალური მაკავშირებელი ციკლები წრეწირთა სიმრავლისთვის

დასაწყისისთვის მოვიყვანთ აუცილებელ განმარტებებს და ძირითად აღნიშვნებს მაკავშირებელი ციკლების ექსტრემალური ამოცანებისთვის. ყველა წერტილი და მრუდი ყოველთვის ეკუთვნის R^2 სიბრტყეს. გავიხსენოთ, რომ ჟორდანის თეორემის თანახმად, მარტივი ჩაკეტილი უწყვეტი წირი (კონტური) Γ სიბრტყეში ორ ნაწილად ჰყოფს სიბრტყეს, რომელთაგან ზუსტად ერთი შემოსაზღვრულია. ამ შემოსაზღვრულ დომენს ეწოდება Γ -ს შიდა არე და მისი ჩაკეტვა აღინიშნება $[\Gamma]$. ამრიგად $\Gamma = \partial[\Gamma]$. კონტურს Γ ეწოდება ამოზნექილი, თუ მისი შიდა არე ამოზნექილია ([4], [13], [18], [21], [48], [49]).

ახლა განვიხილოთ უწყვეტი (წყვილ-წყვილად არათანამკვეთი) გლუვი (უსასრულოდ დიფერენცირებადი) სასრული სისტემა, ამოზნექილი კონტურების $\{X = X_j, j = 1, \dots, n\}$ სასრული სისტემა სიბრტყეზე. აღვნიშნოთ $Z_n = \text{Conf}X$ დეკარტული ნამრავლი $X_1 \times \dots \times X_n$ ბუნებრივი ტოპოლოგიით და გლუვი სტრუქტურით, რაც მას გლუვ კომპაქტურ ორიენტირებულ მრავალწარმოებად აქცევს, რომელიც დიფეომორფულია n -განზომილებიანი T^n ტორის. განმარტებით, ნებისმიერი წერტილი $\text{Conf}X$ -ში არის n წერტილების $p_j \in X_j$ P კონფიგურაცია, რომელიც შეიძლება ჩაითვალოს ჩაკეტილ მრავალკუთხედად, რომელსაც ეწოდება X სისტემის მაკავშირებელი ციკლი. აღვნიშნოთ $L(P)$ -ით მისი სიგრძე (პერიმეტრი). ის შეიძლება ჩაითვალოს გლუვ ფუნქციად Z_n -ზე და ამ ფუნქციის ექსტრემალური მნიშვნელობები საინტერესოა გეომეტრიის და შეზღუდული ოპტიმიზაციის ზოგიერთ ამოცანაში. კერძოდ, კომბინატორული გეომეტრიის კლასიკური პრობლემაა მინიმალური სიგრძის მქონე მაკავშირებელი ციკლის პოვნა და L -ის აბსოლუტური მინიმუმის გამოთვლა Z_n -ზე. მინიმალური

მაკავშირებელი ციკლი X -სთვის შეიძლება ჩაითვალოს L ფუნქციის კრიტიკულ წერტილად Z_n -ზე. ეს ბუნებრივად აჩენს იმას, რომ შევისწავლოთ უფრო ზოგადი პრობლემა, რომელიც ეხება L -ის ყველა კრიტიკული წერტილის და კრიტიკული მნიშვნელობების პოვნას და განვიხილავთ მას, როგორც X -სთვის სტაციონარული (კრიტიკული) მაკავშირებელი ციკლების ამოცანას.

ზოგადი პრობლემის ორ განსაკუთრებულ შემთხვევას შევხებით: (1) სისტემა X შედგება სამი ისეთი X_j წრეწირისგან, რომ $[X_j]$ არის არაშემხები (განცალკევებული შემთხვევა); (2) სისტემა $X = \{X_j\}$ შედგება სამი ან ოთხი კონცენტრული წრეწირისგან (კონცენტრული შემთხვევა).

თავდაპირველად განვიხილავთ მარტივ შემთხვევას, რომელიც პირდაპირ კავშირშია მინიმალური მაკავშირებელი ციკლის კლასიკურ ამოცანასთან. სიცხადისთვის დავიწყებთ ორი განცალკევებული წრეწირის შემთხვევით. ამ შემთხვევისთვის, შედეგები ელემენტარულია, მაგრამ ჩვენ მათ გამოვიყენებთ შემდგომი განზოგადებისთვის შესაბამისი ფორმით.

წინადადება 2.1. ორი განცალკევებული X_1, X_2 წრეწირის შემთხვევაში L ფუნქცია $X_1 \times X_2$ კონფიგურაციულ სივრცეზე არის მორსის ფუნქცია ერთი მინიმუმით, ერთი მაქსიმუმით და ორი არაგადაგვარებული უნაგირის წერტილით.

დამტკიცება. ვთქვათ, მოცემულია ორი წრეწირი რადიუსებით R და r . მანძილი წრეწირების ცენტრებს შორის აღვნიშნოთ d -ით. დიზიუნქტურობის პირობის ძალით სრულდება უტოლობა $d > R + r$. პირველი წრეწირის ცენტრი მდებარეობს კოორდინატთა სათავეში, მეორე წრეწირის ცენტრი კი – წერტილში კოორდინატებით $(d; 0)$. ამ წრეწირებზე აღებულია წერტილები $P_1(R \cos \varphi, R \sin \varphi), P_2(d + r \cos \psi, r \sin \psi)$. L ფუნქციას, რომელიც განსაზღვრულია $\langle P_1 P_2 P_1 \rangle$ ციკლზე, აქვს სახე:

$$L = \sqrt{(d + r \cos \psi - R \cos \varphi)^2 + (r \sin \psi - R \sin \varphi)^2}.$$

მარტივი გარდაქმნებით ფუნქცია მიიღებს სახეს:

$$L = \sqrt{d^2 + R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\varphi - \psi) + 2dr \cos \psi - 2dR \cos \varphi}.$$

L ფუნქციის დიფერენცირებით φ და ψ პარამეტრებით მივიღებთ:

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = \frac{Rr \sin(\varphi - \psi) + dR \sin \varphi}{\sqrt{d^2 + R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\varphi - \psi) + 2dr \cos \psi - 2dR \cos \varphi}},$$

$$\frac{\partial L}{\partial \psi} = -\frac{Rr \sin(\varphi - \psi) + dr \sin \psi}{\sqrt{d^2 + R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\varphi - \psi) + 2dr \cos \psi - 2dR \cos \varphi}}.$$

კრიტიკული წერტილი მიიღება, როდესაც ორივე კერძო წარმოებული უდრის ნულს.

$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$ ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$r(\sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi) + d \sin \varphi = 0.$$

$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = \frac{\partial L}{\partial \psi}$ ტოლობიდან კი გამომდინარეობს, რომ $\sin \psi = \frac{R}{r} \sin \varphi$. $\sin \psi$ -ის ეს მნიშვნელობა შევიტანოთ ზემოთ მიღებულ განტოლებაში. ასევე, შემოვიღოთ აღნიშვნა $u = \sin^2 \varphi$ და შევნიშნოთ, რომ u უცნობი უნდა ეკუთვნოდეს $(0, 1)$ ინტერვალს. შევნიშნოთ, რომ ორივე კერძო წარმოებული უდრის ნულს, თუ $u = 0$. მაშინ $\sin \psi = 0$, რაც გვაძლევს ოთხ კრიტიკულ კონფიგურაციას, რომლებშიც ორივე წერტილი ეკუთვნის წრეწირების ცენტრებზე გამავალ წრფეს. თუ $u \neq 0$, მივიღებთ განტოლებას

$$\sqrt{r^2 - R^2 u} - R\sqrt{1 - u} + d = 0.$$

ამ განტოლების ამოხსნა კი ელემენტარულია. კონკრეტულად, კვადრატში აყვანის ცნობილი ხერხის გამოყენებით და წევრების სათანადო დალაგების დახმარებით ეს განტოლება დაიყვანება შემდეგ წრფივ განტოლებამდე u უცნობისთვის:

$$[4R^2(d^2 - R^2 - r^2) + 4R^4 + 4R^2 r^2]u = 4R^2 r^2 - (d^2 - R^2 - r^2)^2.$$

რადგან $d > R + r$, ადგილი აქვს უტოლობას $d^2 - R^2 - r^2 > 2Rr$. ამგვარად, ამ განტოლების მარჯვენა მხარე უარყოფითია და u უცნობის კოეფიციენტი არ უდრის ნულს. ამიტომ თეორემის პირობებში ამ განტოლების ამონახსნი უდრის

$$u = -\frac{(R^2 - r^2 - d^2)^2 - 4r^2d^2}{4R^2d^2}.$$

ნათქვამიდან გამომდინარეობს, რომ წინადადების პირობებში ეს გამოსახულება უარყოფითია, ანუ იგი არ გვაძლევს დამატებით სტაციონარულ ციკლებს.

ამგვარად, φ და ψ -ს სხვა კრიტიკული მნიშვნელობები, გარდა 0 და π , არ არსებობს. ასე რომ არსებობს ზუსტად ოთხი კრიტიკული კონფიგურაცია. მათი არაგადაგვარებულობის დასამტკიცებლად უნდა შევამოწმოთ, რომ L ფუნქციის $Hess(L)$ ჰესიანი არანულოვანია, სადაც

$$Hess(L) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial \varphi^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial \varphi \partial \psi} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial \varphi \partial \psi} & \frac{\partial^2 L}{\partial \psi^2} \end{pmatrix}$$

კომპიუტერის დახმარებით ჰესიანისთვის მივიღეთ შემდეგი გამოსახულება:

$$\begin{aligned} Hess(L) = & -2rRd(R \\ & - r) \left[(R^2 + r^2 + d^2) \cos(2\varphi - \psi) - \frac{(R - r)d \cos(3\varphi - \psi)}{2} \right. \\ & + \frac{Rr \cos(3\varphi - 2\psi)}{2} - 3(R - r)d \cos(\varphi - \psi) + \frac{Rr \cos(\varphi - 2\psi)}{2} \\ & \left. - \frac{(R - r)d \cos(\varphi + \psi)}{2} + 3Rr \cos \varphi + (R^2 + r^2 + d^2) \cos \psi \right] \\ & / [-16Rrd(R - r) \cos(2\varphi - \psi) + 8R^2r^2 \cos(2\varphi - 2\psi) \\ & + 16Rr(R^2 + r^2 + d^2) \cos(\varphi - \psi) + 8d^2(R \\ & - r)^2 \cos 2\varphi - 16d(R - r)(R^2 + r^2 + d^2) \cos \varphi \\ & - 16Rdr(R - r) \cos \psi + 4R^4 + 16(d^2 + r^2)R^2 - 16Rrd^2 + 4d^4 + 16d^2r^2 \\ & + 4r^4]. \end{aligned}$$

როდესაც $\varphi = \psi = 0$, კომპიუტერის დახმარებით მივიღებთ, რომ ჰესიანი უდრის

$$-\frac{Rrd(R - r)}{R^2 - 2(d - r)R + (d - r)^2},$$

საიდანაც ნათლად ჩანს, რომ $Hess(L) < 0$, ანუ, ამ კონფიგურაციაში L ფუნქციას აქვს არაგადაგვარებული უნაგირა ტიპის კრიტიკული წერტილი. დანარჩენი სამი

კონფიგურაციის არაგადაგვარებულობა მოწმდება ანალოგიურად. ამასთან ცხადია, რომ $\varphi = 0, \psi = \pi$ შემთხვევაში L ფუნქციას აქვს არაგადაგვარებული მინიმუმი, ხოლო $\varphi = \pi, \psi = 0$ შემთხვევაში L ფუნქციას აქვს არაგადაგვარებული მაქსიმუმი. ამგვარად, წინადადება 2.1 დამტკიცებულია.

ჩვენი შედეგების კომპაქტური და მოხერხებული აღწერისთვის ბუნებრივია გამოვიყენოთ მორსის თეორიის რამდენიმე ცნება და ტერმინი. კერძოდ, გავიხსენოთ, რომ f დიფერენცირებად ფუნქციას კომპაქტურ დიფერენცირებად M მრავალწარმოებაზე უწოდებენ მორსის ფუნქციას (Morse function), თუ ყველა მისი კრიტიკული წერტილი არაგადაგვარებულია (ანუ ჰესიანი ამ წერტილებში არანულოვანია). ამასთან, თუ f ფუნქციის კრიტიკული წერტილების რაოდენობა უდრის M მრავალწარმოების ჰომოლოგიის ჯგუფების რანგების ჯამს, მაშინ ასეთ ფუნქციას უწოდებენ ზუსტ მორსის ფუნქციას (exact Morse function). თუ ზუსტი მორსის ფუნქციის ყველა კრიტიკული მნიშვნელობა განხვავებულია, მაშინ ამ ფუნქციას უწოდებენ სრულყოფილ მორსის ფუნქციას (perfect Morse function). როგორც ცნობილია, ზუსტ და სრულყოფილ მორსის ფუნქციებს აქვთ ბევრი გამოყენება დიფერენციალურ ტოპოლოგიაში და ვარიაციათა აღრიცხვაში ([14], [15]). ამიტომ, მოცემული ფუნქციისთვის მნიშვნელოვანია ამ თვისებების შემოწმება.

რადგან n -განზომილებიანი ტორის ჰომოლოგიის ჯგუფთა რანგების ჯამი უდრის 2^n , წინადადება 2.1-ს პირობებში L ფუნქცია ზუსტი მორსის ფუნქციაა. ამასთან, ადვილი დასაწახია, რომ L ფუნქციის კრიტიკული მნიშვნელობები შემდეგია: $d - R - r, d - R + r, d - r + R, d + r + R$. ამიტომ, თუ წინადადება 2.1-ს პირობებში დავუშვებთ, რომ $R \neq r$, მაშინ L ფუნქცია სრულყოფილი მორსის ფუნქციაა.

ახლა ბუნებრივია, გამოვიკვლიოთ პერიმეტრის კრიტიკული კონფიგურაციები იმ შემთხვევებში, როდესაც არ სრულდება $d > R + r$ უტოლობა. თუ $d = R + r$, მაშინ ორი წრეწირი ერთმანეთს ეხება $(R, 0)$ წერტილში. ცხადია, რომ თვითონ ეს

წერტილი კვლავ შეესაბამება პერიმეტრის მინიმუმს და კიდევ გვაქვს სამი ადლუმი: ორი უნაგირა ტიპის და ერთი მაქსიმუმი. თუკი $R - r < d < R + r$, მაშინ ამ ორ წრეწირს აქვს ორი თანაკვეთის წერტილი. მარტივად მოწმდება, რომ ისინი არაგადაგვარებული მინიმუმის წერტილებია და მათი პოლარული კუთხეების სინუსები მოცემულია ზემოთმოყვანილი ფორმულით. ასევე ადვილი დასანახია, რომ $((d - r, 0), (R, 0))$ და $((-R, 0), (d + r, 0))$ ადლუმები ლოკალური მაქსიმუმის კონფიგურაციებია და კიდევ არსებობს ოთხი არაგადაგვარებული უნაგირა ტიპის კონფიგურაცია. ესე იგი სულ არის რვა კრიტიკული (სტაციონარული) მაკავშირებელი ციკლი და პერიმეტრი არ არის ზუსტი მორსის ფუნქცია.

განსაკუთრებულობათა თეორიის ენაზე ეს ნიშნავს, რომ მოხდა სტაციონარული ციკლების ბიფურკაცია $d = R + r$ სიტუაციაში [3]. ეს კი ნიშნავს, რომ $((R, 0), (R, 0))$ ადლუმი გადაგვარებული მინიმუმია, რადგან არაგადაგვარებული მინიმუმი მდგრადია და მასში ბიფურკაცია არ ხდება. ამგვარად, $d = R + r$ სიტუაციაში პერიმეტრი არ არის მორსის ფუნქცია.

როდესაც $0 < d < R - r$, მეორე წრეწირი პირველის შიდა არეშია და ადვილი დასანახია, რომ პერიმეტრს აქვს ოთხი აგარადაგვარებული სტაციონარული კონფიგურაცია. საბოლოოდ, როდესაც $d = 0$, პერიმეტრს აქვს არაიზოლირებული კრიტიკული წერტილები, რომლებიც შედგება ორი კომპონენტისგან, რომელთაგან თითოეული წრეწირის ჰომეომორფულია. ანუ ამ სიტუაციაში პერიმეტრი არ არის მორსის ფუნქცია, არამედ იგი ე.წ. მორს-ბოტის (Morse-Bott) ფუნქციაა [3].

ამგვარად, პერიმეტრი მორსის ფუნქციაა ორი შემთხვევის გარდა: როდესაც $d = R + r$ და როდესაც $d = 0$. შევნიშნოთ, რომ ორი წრეწირის კონფიგურაციული (პარამეტრების) სივრცე ბუნებრივად იზომორფულია სამ-განზომილებიანი ევკლიდური სივრცის პირველი ოქტანტის. ჩვენი შედეგებიდან გამომდინარეობს, რომ პერიმეტრი მორსის ფუნქციაა პარამეტრების ყველა სამეულებისთვის, რომლებიც არ ეკუთვნიან $d = R + r$ და $d = 0$ სიბრტყეების გაერთიანებას. ცხადია, რომ ამ ორი სიბრტყის გაერთიანების დამატება ღია და ყველგან მკვრივი

სიმრავლე პარამეტრების სივრცეში. ასეთ სიტუაციას განსაკუთრებულობათა თეორიაში გამოხატავენ სიტყვებით: "მორსის თვისება სრულდება თითქმის ყველა პარამეტრისთვის" ან "მორსის თვისება სრულდება ტიპიური პარამეტრებისთვის". ასეთი სიტუაციები და წინადადებები ხშირად ჩნდება განსაკუთრებულობათა თეორიაში და დიფერენციალურ ტოპოლოგიაში და ჩვენც ამ ტერმინოლოგიას გამოვიყენებთ სათანადო სიტუაციებში.

წინადადება 2.1 და ზემოთმოყვანილი კომენტარების გათვალისწინებით ვღებულობთ შემდეგი დასკვნის ჩამოყალიბებას ორი წრეწირის ტიპიური განლაგების შემთხვევაში.

წინადადება 2.2. ორი წრეწირის სიბრტყეში ტიპიური განლაგებისთვის მაკავშირებელი ციკლის პერიმეტრი მორსის ფუნქციაა, რომლის სტაციონარული ციკლების რაოდენობა უდრის ოთხს ან რვას.

საერთოდ მოსალოდნელია, რომ ზოგად მდგომარეობაში მყოფი წრეწირთა სისტემისთვის ფუნქცია L წარმოადგენს მორსის ფუნქციას. ეს არის ე.წ. პარამეტრული ტრანსვერსალობის თეორემის ([4]) და შეზღუდული ოპტიმიზაციის ამოცანების ზოგადი პარადიგმების შედეგი (ასეთი მსჯელობის კონკრეტული მაგალითი დეტალურადაა მოყვანილი [23] ნაშრომში, გვ. 7, Thm.2). ეს ზოგადი შედეგი მნიშვნელოვანია, რადგან მიუთითებს ასეთი ამოცანების შესწავლისთვის მორსის თეორიის მეთოდების და შედეგების გამოყენების შესაძლებლობაზე, მაგრამ ამ ტიპის ზოგადი მსჯელობების გამოყენება მარტივ სიტუაციებში არ არის საპირფონე. ამიტომ ამ დისერტაციაში ყველა განხილულ შემთხვევაში მორსის თვისება დამტკიცებულია პირდაპირი გზით ფერმა-სნელიუსის პრინციპის და ჰესიანის გამოთვლების გამოყენებით ([44]).

წინადადება 2.1-ს მსგავსი შედეგის მიღება შეიძლება პერიმეტრის კვადრატისთვის, რომელსაც ხშირად უწოდებენ ჰუკის ენერგიას. სახელდობრ, ორი დიზიუნქტურული წრეწირის შემთხვევაში მაკავშირებელი ციკლის ჰუკის ენერგიას აქვს ოთხი არაგადაგვარებული სტაციონარული კონფიგურაცია.

აღვნიშნოთ, რომ დისკრეტულ გეომეტრიაში ამოზნექილი ქვესიმრავლეების სისტემისთვის განიხილება ასევე ე.წ. „კონექტორის“ („connector“) ცნება, რომელიც განისაზღვრება, როგორც ჩაკეტილი ინტერვალების I ბმული სისტემა, ისეთი, რომ I -ს გაერთიანება მოცემულ წრეწირებთან ბმული სიმრავლეა. ამგვარად, ეს ჩვენს ნაშრომში განსაზღვრული მაკავშირებელი ციკლის განზოგადებაა. ამასთან, „მინიმალური მაკავშირებელი“ განისაზღვრება, როგორც მაკავშირებელი, რომელსაც აქვს მინიმალური შესაძლო სიგრძე. განმარტებიდან ირკვევა, რომ მისი სიგრძე არ აღემატება მინიმალური მაკავშირებელი ციკლის სიგრძეს. აბსოლუტურად მინიმალური მაკავშირებლისა და მისი სიგრძის პოვნის ამოცანა მრავალი ავტორის მიერ შეისწავლებოდა ([32], [43]). აღნიშნულიდან ცხადია, რომ ეს პრობლემა მჭიდრო კავშირშია შტაინერის მინიმალური ქსელის მნიშვნელოვან ცნებასთან წერტილთა სისტემის შემთხვევაში ([1], [15], [23], [32], [36], [50]). მაგალითად, მკაცრ ამოზნექილ მდგომარეობაში სამი განცალკევებული წრეწირისთვის მინიმალური მაკავშირებელი მოცემულია მათი ცენტრების ტორიჩელის T წერტილით და წრფის მონაკვეთებით, რომლებიც T -ს აერთებენ წრეწირთა ცენტრებთან. აქედან გამომდინარე, მისი სიგრძე შეიძლება გამოისახოს ცხადი სახის ალგებრული ფორმულით ტორიჩელის წერტილის ცნობილი ფორმულის გამოყენებით. ანალოგიურად, არათანამკვეთ წრეწირთა მრავალი კონფიგურაციისთვის, მინიმალური მაკავშირებელი შეიძლება მიღებულ იქნას, როგორც შტაინერის მინიმალური ქსელის ნაწილი წრეწირთა ცენტრებისთვის ([7], [24], [26], [34]). ასეთი პირდაპირი კავშირი ორ პრობლემას შორის მხოლოდ წრეწირების შემთხვევაში არსებობს. ზოგადად, ამ ორი პრობლემის ამონახსნების ფორმები არსებითად განსხვავებულია.

2.1. ექსტრემალური ამოცანები მაკავშირებელი ციკლებისთვის

ამ პარაგრაფში განვიხილავთ ერთ-ერთ ექსტრემალურ ამოცანას, რომელიც კარგად ცნობილი მინიმალური კონექტორის ამოცანის ბუნებრივ განზოგადებას წარმოადგენს. კლასიკური მინიმალური კონექტორის ამოცანა შეისწავლება დისკრეტული მათემატიკის მეთოდებით, ხოლო ქვემოთ აღწერილი განზოგადების შესწავლაში შესაძლო ხდება არაწრფივი ანალიზის და განსაკუთრებულობათა თეორიის ტოპოლოგიური მეთოდების გამოყენება, რაც ამ თემის ახალ ასპექტებს ამჟღავნებს ([3], [4], [9], [16], [31], [46]).

ჩვენს ამოცანაში კლასიკური მინიმალური კონექტორის ამოცანისგან განსხვავებით, გრაფის წვეროების მაგივრად განვიხილავთ საკმაოდ პატარა r რადიუსის მქონე წრეწირებს ცენტრებით მოცემულ წერტილებში და ვეძებთ ექსტრემალური სიგრძის მქონე ამ წრეწირების მაკავშირებელ ციკლებს. როდესაც $r \rightarrow 0$, მივიღებთ ზღვარში მინიმალური კონვენციონალური კონექტორის ამოცანის ამოხსნას. ამგვარად, ჩვენს მიერ შესწავლილი ამოცანა მინიმალური კონექტორის ამოცანის პირდაპირ და ბუნებრივ განზოგადებას წარმოადგენს. როგორც ცნობილია, ასეთი ტიპის ექსტრემალური ამოცანების შესწავლა ზოგად შემთხვევაში დიდ სირთულეებს იწვევს, ამიტომ ჩვენ თავიდან განვიხილავთ ამ ამოცანას სამი დიზიუნქტურული წრეწირის შემთხვევაში. ეს კერძო შემთხვევა იმითაც საინტერესოა, რომ იგი დაკავშირებულია აპოლონიუსის ერთ-ერთ კლასიკურ ამოცანასთან, რასაც ქვემოთ მოცემულ რამდენიმე საინტერესო დასკვნასთან მივყავართ.

ჩვენს მიდგომაში მნიშვნელოვანია ის ფაქტი, რომ ტიპიურ შემთხვევებში პერიმეტრი მორსის ფუნქციაა, რაც წარმოადგენს ამ პარაგრაფის პირველ მნიშვნელოვან შედეგს, რომელსაც დავამტკიცებთ განსაკუთრებულობათა თეორიის ე.წ. პარამეტრული ტრანსვერსალობის პარადიგმის დახმარებით ([20], [21], [22], [27], [35]).

ცნობილია, რომ წრეწირების დიზიუნქტურული სამეულის ტიპიურ შემთხვევაში მაკავშირებელი ციკლის პერიმეტრი მორსის ფუნქციაა ამ

წრეწირების დეკარტულ ნამრავლზე, რომელიც სამგანზომილებიანი ტორის კანონიკურად დიფეომორფულია. აქვე აღვნიშნავთ ამ პარადიგმის ორ უშუალო და კარგად ცნობილ შედეგს, რომელთა გარკვეულ ილუსტრაციას ქვემოთ მოვიყვანთ.

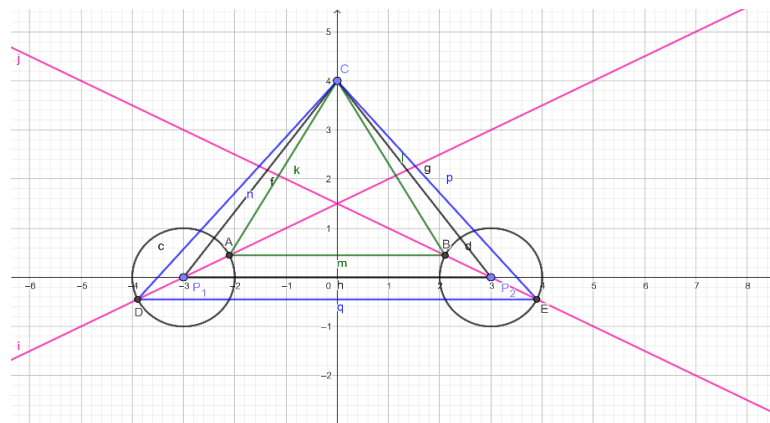
შენიშვნა 2.1. სამი წრეწირის ტიპიურ შემთხვევებში პერიმეტრის სტაციონარული ციკლების რაოდენობა არანაკლებია რვის.

ეს შეფასება ზუსტია, რადგან, როგორც ქვემოთ ვაჩვენებთ, ეს სრულდება პატარა წრეწირებისთვის ცენტრებით წესიერი სამკუთხედის წევრობით.

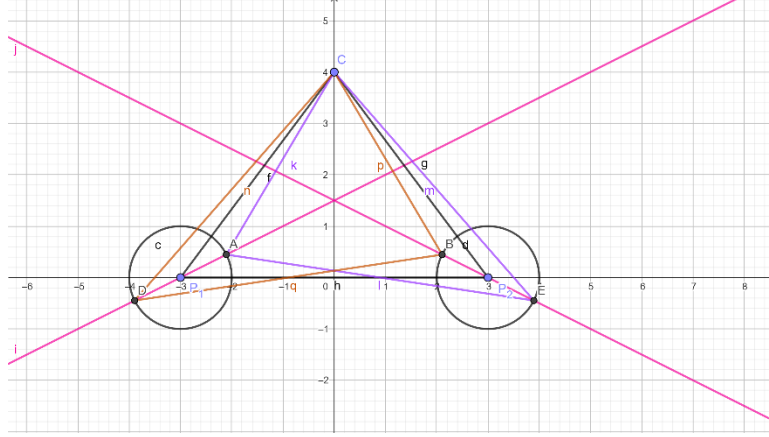
შენიშვნა 2.2. ერთი წერტილის და ორი დიზიუნქტურული წრეწირის შემთხვევაში სტაციონარული ციკლების რაოდენობა არანაკლებია ოთხის.

ეს შეფასებაც ზუსტია, როგორც ვაჩვენებთ შემდეგ მაგალითში, რომლის გაანალიზებისთვის გამოვიყენეთ კომპიუტერი.

მოცემულია წერტილი C და r - რადიუსის მქონე ორი წრეწირი ცენტრებით P_1 და P_2 წერტილებში. ამასთანავე, ეს წერტილები ქმნიან ტოლფერდა სამკუთხედს. (ნახ. 1 და ნახ. 2)



ნახ. 1. პერიმეტრის ექსტრემუმები (მინიმუმი და მაქსიმუმი) წერტილისა და ორი წრეწირის სიტუაციისთვის.



ნახ. 2. პერიმეტრის ექსტრემუმები (უნაგირები) წერტილისა და ორი წრეწირის სიტუაციისთვის.

$P_1(-1; 0), P_2(1; 0), A(-x; y), B(x; y), C(0; a)$. იმისათვის, რომ შესრულდეს სწელიუსის პირობა, ადგილი უნდა ჰქონდეს ტოლობას $\angle P_2BC = \angle P_2BA$.

$$\cos(\widehat{P_2BC}) = \frac{(\overrightarrow{BP_2}, \overrightarrow{BC})}{|\overrightarrow{BP_2}| |\overrightarrow{BC}|}, \cos(\widehat{P_2BA}) = \frac{(\overrightarrow{BP_2}, \overrightarrow{BA})}{|\overrightarrow{BP_2}| |\overrightarrow{BA}|}$$

$$\overrightarrow{BP_2} = (1 - x; -y), \overrightarrow{BC} = (-x; a - y), \overrightarrow{BA} = (-2x; 0), |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{x^2 + (a - y)^2}, |\overrightarrow{BA}| = 2x.$$

$$\frac{(\overrightarrow{BP_2}, \overrightarrow{BC})}{|\overrightarrow{BP_2}| |\overrightarrow{BC}|} = \frac{(\overrightarrow{BP_2}, \overrightarrow{BA})}{|\overrightarrow{BP_2}| |\overrightarrow{BA}|},$$

$$\frac{x(x - 1) + y(y - a)}{\sqrt{x^2 + (a - y)^2}} = \frac{2x(x - 1)}{2x},$$

$$(x - 1)^2 + y^2 = r^2, \text{ საიდანაც } y = \sqrt{r^2 - (x - 1)^2}.$$

$$x^2 - x + r^2 - (x - 1)^2 - a\sqrt{r^2 - (x - 1)^2}$$

$$= (x - 1)\sqrt{x^2 + a^2 - 2a\sqrt{r^2 - (x - 1)^2} + r^2 - (x - 1)^2}.$$

$$x + r^2 - 1 - a\sqrt{r^2 - (x - 1)^2} = (x - 1)\sqrt{x^2 + a^2 - 2a\sqrt{r^2 - (x - 1)^2} + r^2 - (x - 1)^2}$$

საბოლოო სახე

$$4(a^2 + 1)x^6 - 4(6a^2 - r^2 + 6)x^5 + [4a^4 - 8(r^2 - 8)a^2 + r^4 - 28r^2 + 60]x^4 -$$

$$4[4a^4 - (9r^2 - 24)a^2 + 3r^4 - 18r^2 + 20]x^3 - 2[r^6 - (3a^2 + 17)r^4 +$$

$$2(a^4 + 16a^2 + 22)r^2 - 6(2a^4 + 7a^2 + 5)]x^2 + 8(r^2 - 2)(a^2 - r^2 + 1.5)(a^2 -$$

$$r^2 + 1)x + (r^2 - 2)^2(a^2 - r^2 + 1)^2 = 0, \quad (2.1)$$

(2.1) განტოლების ფაქტორიზაციის შედეგად მივიღებთ განტოლებას

$$[a^2 - r^2 + (x - 1)^2][4(a^2 + 1)x^4 - 4(4a^2 - r^2 + 4)x^3 + [r^4 - 4(a^2 + 4)r^2 + 24(a^2 + 1)]x^2 + 8(r^2 - 2)(a^2 - 0.75r^2 + 1)x + (r^2 - 2)^2(a^2 - r^2 + 1)] = 0, \quad (2.2)$$

(2.2) განტოლების ამოხსნის შედეგად მივიღებთ ორ კომპლექსურ და ოთხ ნამდვილ ფესვს ([51]):

$$x_{1,2} = 1 \pm i\sqrt{a^2 - r^2},$$

$$x_{3,4} = \frac{4a^2 - r^2 + 4}{a^2 + 1} - S \pm \frac{1}{2}\sqrt{-4S^2 - 2p + \frac{q}{S}},$$

$$x_{5,6} = \frac{4a^2 - r^2 + 4}{a^2 + 1} + S \pm \frac{1}{2}\sqrt{-4S^2 - 2p - \frac{q}{S}},$$

სადაც

$$p = \frac{r^4 - 4(a^2 + 4)r^2 + 24(a^2 + 1)}{4(a^2 + 1)} - \frac{3(4a^2 - r^2 + 4)^2}{8(a^2 + 1)^2},$$

$$q = \left[\frac{-(4a^2 - r^2 + 4)}{2(a^2 + 1)} \right]^3 + \frac{(4a^2 - r^2 + 4)[r^4 - 4(a^2 + 4)r^2 + 24(a^2 + 1)]}{8(a^2 + 1)^2} + \frac{2(r^2 - 2)(a^2 - 0.75r^2 + 1)}{(a^2 + 1)},$$

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{-\frac{2}{3}p + \frac{1}{12(a^2 + 1)}(Q + \frac{\Delta_0}{Q})},$$

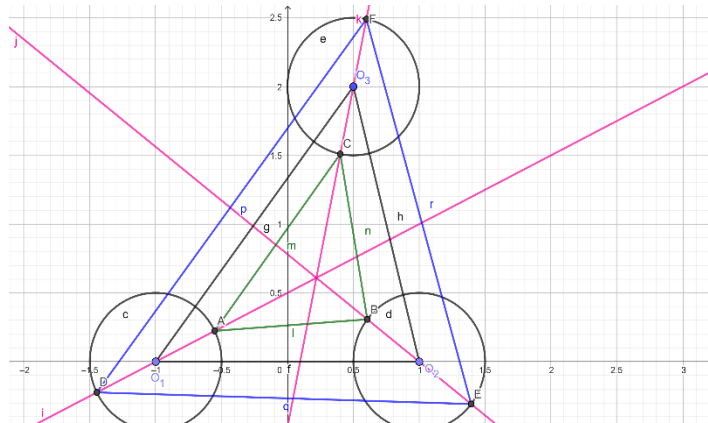
$$Q = \sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(\Delta_1 + \sqrt{\Delta_1^2 - 4\Delta_0^2}\right)},$$

$$\Delta_0 = [r^4 - 4(a^2 + 4)r^2 + 24(a^2 + 1)]^2 + 96(4a^2 - r^2 + 4)(r^2 - 2)(a^2 - 0.75r^2 + 1) + 48(a^2 + 1)(r^2 - 2)^2(a^2 - r^2 + 1),$$

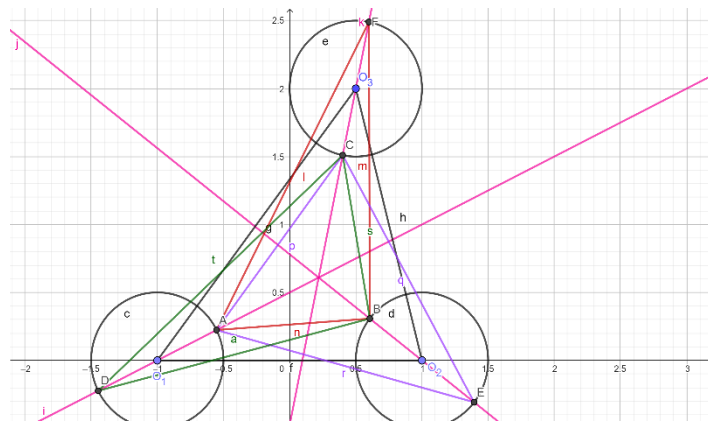
$$\Delta_1 = 2[r^4 - 4(a^2 + 4)r^2 + 24(a^2 + 1)]^2 + 288(4a^2 - r^2 + 4)[r^4 - 4(a^2 + 4)r^2 + 24(a^2 + 1)](r^2 - 2)(a^2 - 0.75r^2 + 1) + 432(4a^2 - r^2 + 4)^2(r^2 - 2)^2(a^2 - r^2 + 1) + 6912(a^2 + 1)(r^2 - 2)^2(a^2 - 0.75r^2 + 1)^2 - 288(a^2 + 1)[r^4 - 4(a^2 + 4)r^2 + 24(a^2 + 1)](r^2 - 2)^2(a^2 - r^2 + 1).$$

(თუ, ვთქვათ, $a = \sqrt{3}, r = 0.5$, მაშინ $x = 1.2, 1.45, 0.71, 0.59$).

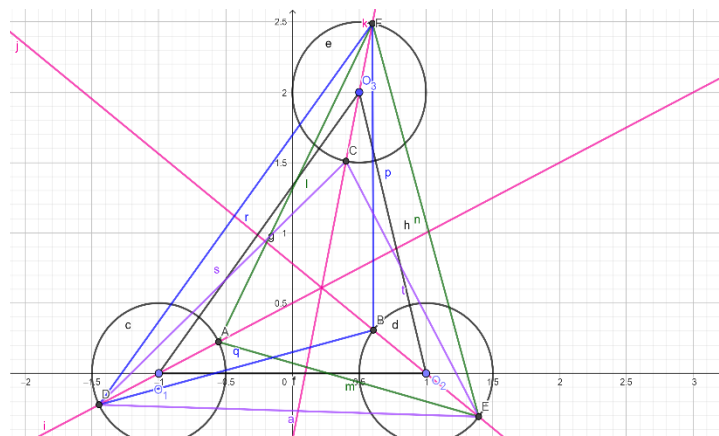
ზემოთ მოყვანილ ნახაზებში: მაქსიმუმი - ΔDCE , მინიმუმი - ΔACB , უნაგირები - $\Delta DCB, \Delta ACE$.



ნახ. 3. პერიმეტრის ექსტრემუმები (მინიმუმი და მაქსიმუმი) სამი დეზიუნქტურული წრეწირისთვის.

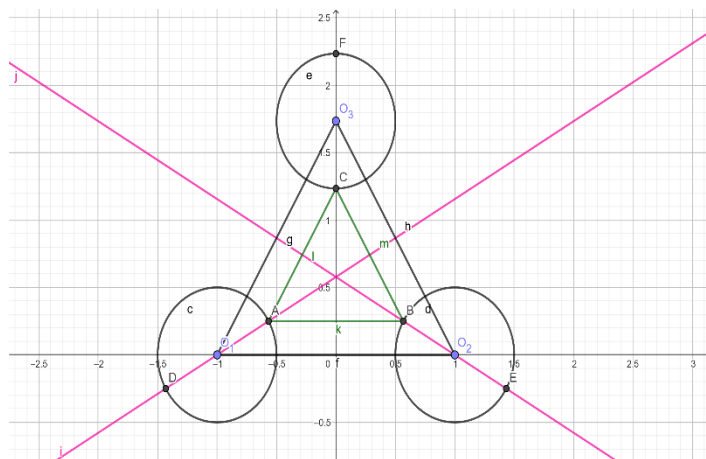


ნახ. 4. პერიმეტრის ექსტრემუმები (უნაგირების პირველი ტიპი) სამი დეზიუნქტურული წრეწირისთვის.



ნახ. 5. პერიმეტრის ექსტრემუმები (უნაგირების მეორე ტიპი) სამი დეზიუნქტურული წრეწირისთვის.

უფრო დეტალურად განვიხილოთ წესიერი სამკუთხედი წვეროებით $O_1(-a; 0)$, $O_2(a; 0)$, $O_3(0; a\sqrt{3})$ და მინიმალური პერიმეტრის მქონე $\triangle ABC$ (ნახ. 6).



ნახ. 6. პერიმეტრის მინიმუმი (ABC) წესიერი სამკუთხედის შემთხვევისთვის.

სწელიუსის კანონის თანახმად, $\angle O_2BC = \angle O_2BA$. ორ ვექტორს შორის კუთხის კოსინუსის განმარტების თანახმად, $\frac{(\vec{BO_2}, \vec{BC})}{|\vec{BO_2}| |\vec{BC}|} = \frac{(\vec{BO_2}, \vec{BA})}{|\vec{BO_2}| |\vec{BA}|}$, საიდანაც მივიღებთ განტოლებას

$$\begin{aligned}
& x^4 - 2ax^3 + \left(a\sqrt{3} - r - \sqrt{r^2 - (x-a)^2}\right)^2 x^2 - 2a\left[\left(r^2 - a^2 + \sqrt{r^2 - (x-a)^2}(r - a\sqrt{3})\right) + \right. \\
& \left. \left(a\sqrt{3} - r - \sqrt{r^2 - (x-a)^2}\right)^2\right]x - \left(r^2 - a^2 + \sqrt{r^2 - (x-a)^2}(r - a\sqrt{3})\right)^2 + \\
& a^2 \left(a\sqrt{3} - r - \sqrt{r^2 - (x-a)^2}\right)^2 = 0.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

მიღებული განტოლების ერთადერთი ნამდვილი ფესვია

$$x = a - \frac{\sqrt{3}}{2}r.$$

პერიმეტრის მინიმალური მნიშვნელობა იქნება $P_{ABC} = 6\left(a - \frac{\sqrt{3}}{2}r\right)$.

ამ მაგალითებში ჩანს, რომ დიზიუნქტურული წრეწირების სიტუაციაში ამოცანა ბევრად უფრო მრავალფეროვანია და ზოგადი შედეგების მიღება ბევრად უფრო რთულია. ამიტომ ამ თავში ჩვენ მოვიყვანთ ზოგად შედეგებს მხოლოდ კონცენტრული წრეწირების შემთხვევაში.

2.2. ექსტრემალური მაკავშირებელი ციკლები კონცენტრული წრეწირებისთვის

ამ პარაგრაფში განვიხილავთ მინიმალური მაკავშირებელი ციკლის ამოცანას კონცენტრული წრეწირებისთვის. ვთქვათ, X არის კონცენტრულ წრეწირთა სისტემა $C_i \subset R^2, i = 1, \dots, n$ რადიუსებით $r_i > 0, i = 1, \dots, n$. ყოველთვის ივარაუდება, რომ ისინი ცენტრირდებიან კოორდინატთა სათავეში და $0 < r_1 < \dots < r_n$ ზოგადობის შეუზღუდავად. Z_n -ით აღვნიშნეთ დეკარტული ნამრავლი $C_1 \times \dots \times C_n$. Z_n არის დიფერომორფული n -ტორის. ჩვენ ვაპირებთ გამოვიკვლიოთ რამდენიმე დიფერენცირებადი ფუნქციის კრიტიკული წერტილები Z_n -ზე. მოსახერხებელია Z_n -ის წერტილები მოვიხსენიოთ, როგორც სიბრტყის წერტილთა კონფიგურაციები. $P = (P_1, \dots, P_n)$ კონფიგურაციისთვის განვიხილავთ მის პერიმეტრს $L(P)$ და (ორიენტირებულ) ფართობს $A(P)$. გავიხსენოთ, რომ $p_j =$

(x_j, y_j) ციკლის (მრავალკუთხედის) ორიენტირებული ფართობი განისაზღვრება ფორმულით

$$2A = \sum |p_i \times p_{i+1}|,$$

სადაც $|p_i \times p_{i+1}|$ არის p_i -ს და p_{i+1} -ის ვექტორული ნამრავლის სიგრძე და განიხილება, როგორც ორი ვექტორი R^3 -ში. ცხადია, რომ L და A გლუვი (უსასრულოდ დიფერენცირებადი) ფუნქციებია X -ზე. ამრიგად, შეიძლება განვიხილოთ მათი კრიტიკული წერტილები, რომლებსაც კრიტიკულ კონფიგურაციებს ვუწოდებთ. ჩვენი მიზნია, ვიპოვოთ L და A კრიტიკული კონფიგურაციების რიცხვი და ფორმები, განსაკუთრებით ისინი, რომლებიც შეესაბამება განხილული ფუნქციების გლობალურ მაქსიმუმს.

თავდაპირველად ვაჩვენებთ შედეგებს სამი კონცენტრული წრეწირისთვის, რომლებსაც შემდგომ გამოვიყენებთ, როგორც პარადიგმას. ვთქვათ, S_1, S_2, S_3 კონცენტრული წრეწირებია რადიუსებით $0 < r_1 < r_2 < r_3$ და ცენტრით საკოორდინატო სიბრტყის სათავეზე. ჩავსვათ $X = S_1 \times S_2 \times S_3$ და განვიხილოთ X , როგორც სამეულის კონფიგურაციული სივრცეები $P = (p_i), p_i \in S_i$. მოსახერხებელია, ჩავწეროთ $p_1 = A, p_2 = B, p_3 = C$. ABC სამკუთხედის L პერიმეტრი განსაზღვრავს გლუვ (უსასრულოდ დიფერენცირებადი) ფუნქციას $L: X \rightarrow R_+$, და საინტერესოა ვიპოვოთ მისი ყველა კრიტიკული წერტილი და მათი ტოპოლოგიური ტიპები.

ახლა წარმოვადგენთ რამდენიმე ზოგად დებულებას, რომლებიც სამართლიანია ნებისმიერი რაოდენობის კონცენტრული წრეწირისთვის. ვთქვათ, n წერტილთა P კონფიგურაცია $p_i \in C_i$ არის გაწრფევებული, თუ ყველა p_i წერტილის პოლარული კუთხეები არის 0 ან π . ცხადია, გაწრფევებული კონფიგურაციების რაოდენობაა 2^n . ახლა კი სამუდამოდ დავაფიქსიროთ წერტილი $p_1 = (r_1, 0) \in C_1$. მაშინ, გაწრფევებული კონფიგურაციების რაოდენობა, დაფიქსირებული p_1 -ით, არის 2^{n-1} .

თეორემა 2.1. ყოველი გაწრფევებული კონფიგურაცია არის L -ის კრიტიკული წერტილი X_n -ზე. ამასთან, რადიუსების ტიპური მნიშვნელობებისთვის ყველა გაწრფევებული კონფიგურაცია არაგადაგვარებული კრიტიკული წერტილია.

დამტკიცება. აღვნიშნოთ p_i წერტილის პოლარული კუთხეები და ჩავსვათ

$$\psi_i = \varphi_{i+1} - \varphi_i, i = 1, \dots, n-1, \psi_n = 2\pi - \sum_{i=1}^{n-1} \psi_i.$$

კოსინუსების თეორემის ძალით მივიღებთ

$$L(P) = \sum_{i=1}^n \sqrt{r_i^2 + r_{i+1}^2 - 2r_i r_{i+1} \cos \psi_i}.$$

მისი გრადიენტი არის

$$\nabla L = \left(\frac{2r_1 r_2 \sin \psi_1}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \psi_1}} + \frac{2r_1 r_n \sin(\sum_{i=1}^{n-1} \psi_i)}{\sqrt{r_1^2 + r_n^2 - 2r_1 r_n \cos(\sum_{i=1}^{n-1} \psi_i)}} \right).$$

გაწრფევებული კონფიგურაციისთვის ყოველი ψ_i არის 0 ან π . ამიტომ $\sin \psi_i = 0$ ნებისმიერი i -სთვის. ამიტომ მრიცხველში ყველა წევრი ქრება და გრადიენტიც გაქრება. ამგვარად, ნებისმიერი გასწორებული კონფიგურაცია იქნება L -ის კრიტიკული წერტილი Z_n -ზე.

თეორემის მეორე წინადადების დამტკიცება გამომდინარეობს შემდეგი არგუმენტებიდან: ზემოთ მოყვანილი ფორმულის დახმარებით L ფუნქციის ჰესიანი გამოითვლება ცხადი სახით. ამასთან, ცხადია, ყველა გაწრფევებულ კონფიგურაციაში ჰესიანი წარმოადგენს r_i პარამეტრების რაციონალურ ფუნქციას, რომელიც იგივეურად არ უდრის 0-ს. ეს ნიშნავს, რომ რადიუსების ის მნიშვნელობები, სადაც ერთ-ერთი ამ ჰესიანებიდან უდრის 0-ს, ქმნიან არსადმკვრივ ჩაკეტილ სიმრავლეს. ამიტომ, ასეთი სიმრავლეების გაერთიანების დამატება სივრცეში წარმოადგენს ყველგანმკვრივ ღია სიმრავლეს. აქედან გამომდინარეობს, რომ რადიუსების ის მნიშვნელობები, რომლებიც ეკუთვნიან ამ დამატებას, ყველა გაწრფევებული მნიშვნელობა არაგადაგვარებულია, რაც,

დიფერენციალურ ტოპოლოგიაში მიღებული ტერმინოლოგიის მიხედვით ნიშნავს, რომ ეს დებულება სრულდება რადიუსების ტიპური მნიშვნელობებისთვის.

ამგვარად, თეორემა 2.1 დამტკიცებულია.

ბოლო მსჯელობის თვალსაჩინო ილუსტრაციის მიზნით მოვიყვანო სათანაო გამოთვლებს $n = 3$ შემთხვევაში. ამ შემთხვევაში მოსახერხებელია რადიუსების აღნიშვნა a, b, c -ით და პოლარული კუთხეები კი $x; y; z = 2\pi - x - y$. მეორე რიგის წარმოებულების გამოთვლით მივიღებთ

$$\begin{aligned} L_{xx} &= -\frac{a^2 b^2 \sin^2 x}{(a^2 + b^2 - 2ab \cos x)^{3/2}} + \frac{ab \cos x}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos x}} \\ &\quad - \frac{a^2 c^2 \sin^2(x+y)}{(a^2 + c^2 - 2ac \cos(x+y))^{3/2}} + \frac{ac \cos(x+y)}{\sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cos(x+y)}}, \\ L_{xy} &= -\frac{a^2 c^2 \sin^2(x+y)}{(a^2 + c^2 - 2ac \cos(x+y))^{\frac{3}{2}}} + \frac{ac \cos(x+y)}{\sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cos(x+y)}}, \\ L_{yy} &= -\frac{b^2 c^2 \sin^2 y}{(b^2 + c^2 - 2bc \cos y)^{\frac{3}{2}}} + \frac{bc \cos y}{\sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos y}} - \frac{a^2 c^2 \sin^2(x+y)}{(a^2 + c^2 - 2ac \cos(x+y))^{\frac{3}{2}}} \\ &\quad + \frac{ac \cos(x+y)}{\sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cos(x+y)}}. \end{aligned}$$

აქედან კი ნათელი ხდება, რომ $h(L) = L_{xx}L_{yy} - L_{xy}^2$ ჰესიანი მართლაც a, b, c პარამეტრების არანულოვანი რაციონალური ფუნქციაა.

ახლა გამოვთვალოთ ჰესიანის მნიშვნელობები ყველა აღლუმში.

სიმარტივისთვის ჩავთვალოთ, რომ $a = 1$, რაც ზოგადობას არ შეზღუდავს. მაშინ მივიღებთ:

$$\begin{aligned} 1) \quad x = 0, y = 0; h(L) &= \frac{2b^2c}{(b-1)(c-b)} > 0, \\ 2) \quad x = \pi, y = 0; h(L) &= -\frac{2b^2c}{(b+1)(c-b)} < 0, \\ 3) \quad x = 0, y = \pi; h(L) &= -\frac{2bc}{(b-1)(c+1)} < 0, \end{aligned}$$

$$4) x = \pi, y = \pi; h(L) = -\frac{2bc}{(b+1)(c-1)} < 0.$$

აქედან ჩანს, რომ თითოეული აღლუმი არაგადაგვარებულია. როგორც ვიცით, პირველ შემთხვევაში ეს არის მინიმუმი, ხოლო დანარჩენ სამ შემთხვევაში ეს არის უნაგირის ტიპის კრიტიკული კონფიგურაცია.

ამგვარად, $n = 3$ შემთხვევაში წარმოვადგინეთ თეორემის პირდაპირი დეტალური დამტკიცება.

შევნიშნოთ, რომ „მარჯვენა“ გაწრფევებული კონფიგურაცია, რომლის ყველა პოლარული კუთხე ნულის ტოლია, არის გლობალური მინიმუმის წერტილი L -სთვის და ეს მინიმალური მნიშვნელობა ტოლია $2(c-a)$. ამის შემდეგ კი, ბუნებრივია, გვაინტერესებს, როგორია სხვა კრიტიკული მაკავშირებელი ციკლების ფორმები და სიგრძე. $n = 3$ -ისთვის, ელემენტარული გეომეტრიული მოსაზრებები გვიჩვენებს, რომ ყველა გაწრფევებული კონფიგურაცია, გარდა მინიმალურისა, არის L -ის უნაგირის ტიპის წერტილები, ამიტომ მათი მორსის ინდექსები უდრის 1-ს.

ზოგად შემთხვევაში კი მორსის ინდექსები შეიძლება მოიძებნოს სილვესტრის წესის გამოყენებით ჰესეს მატრიცისა და მისი ძირითადი მინორების ნიშნების გამოთვლით ([5], [6], [7], [29], [45]).

ამგვარად, ნებისმიერი რაოდენობის კონცენტრული წრეწირებისთვის ვიპოვეთ მინიმალური მაკავშირებელი ციკლი და რამდენიმე ვირტუალური უნაგირის წერტილი. შემდეგი შედეგი აჩვენებს, რომ ხშირ შემთხვევაში შეგვიძლია გამოვიკვლიოთ კრიტიკული მაკავშირებელი ციკლები მორსის თეორიის ჩარჩოებში. ქვემოთ მოვიყვანთ მაგალითებს, სადაც ეს დაგვეხმარება კრიტიკული დამაკავშირებელი ციკლების სრული სიის მიღებასა და გადამოწმებაში.

ქვემოთ გავაგრძელებთ $n = 3$ შემთხვევას, სადაც L -ის ყველა სატციონარული ციკლების არაგადაგვარებულობა რადიუსების ნებისმიერი მნიშვნელობისთვის შესაძლებელია პირდაპირი გამოთვლებით.

ახლა შევუდგებით ყველა კრიტიკული წერტილის აღწერას $n = 3$ -სთვის. გრადიენტის გაქრობა გვაძლევს ორ მიმართებას, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ ΔABC -ს კუთხეთა ბისექტრისები თანაიკვეთებიან კოორდინატთა სათავეში (კონცენტრულ წრეწირთა ცენტრი).

$n = 3$ -ისთვის, ყველა კრიტიკული წერტილის აღწერა საკმაოდ მარტივია. შეგახსენებთ, რომ ყოველთვის შესაძლებელია ნამდვილ პოლინომურ განტოლებათა სისტემის ნამდვილი ამონახსნების რიცხვის პოვნა [4]-ში მოცემული ფორმულების გამოყენებით. ამ ფორმულების გამოყენებით განტოლებები კრიტიკული მაკავშირებელი ციკლების კოორდინატებისთვის რადიუსების გარკვეული მნიშვნელობებისთვის (ვთქვათ, 1, 2, 3), აღმოვაჩენთ, რომ არსებობს ზუსტად ექვსი კრიტიკული მაკავშირებელი ციკლი. ის ფაქტი, რომ ამონახსნების რაოდენობა ერთნაირია რადიუსების ყველა მნიშვნელობისთვის, მოჰყვება სტანდარტული ჰომოტოპიის არგუმენტს. კრიტიკული ციკლებიდან ოთხი (გაწრფევებული) უკვე ნაპოვნია. დანარჩენი ორი, როგორც ჩანს, არის არაგადაგვარებული მაქსიმუმი L -ის იმავე მნიშვნელობით. მათი გეომეტრიული ფორმა გამომდინარეობს ფერმა-სნელიუსის პრინციპიდან.

2.2.1. პერიმეტრის ექსტრემუმები სამი კონცენტრული წრეწირისთვის

სამი კონცენტრული წრეწირის შემთხვევისთვის დავამტკიცეთ შემდეგი თეორემა.

თეორემა 2.2. სამი კონცენტრული წრეწირისთვის L ფუნქციას აქვს ზუსტად ექვსი კრიტიკული წერტილი, რომელთაგან თითოეული არაგადაგვარებულია: ორი მაქსიმუმი (ინდექსი 2), სამი უნაგირის წერტილი (ინდექსი 1) და ერთი მინიმუმი (ინდექსი 0). კრიტიკული მნიშვნელობები მზარდი თანმიმდევრობით ასეთია:

$$L_1 = L_{min} = 2(r_3 - r_1), L_2 = 2(r_1 + r_2), L_3 = 2(r_1 + r_3), L_3 = 2(r_2 + r_3),$$

$$L_{max} = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2y \frac{r_1^2 r_2}{r_3}} + \sqrt{r_1^2 + r_3^2 - 2y \frac{r_1^2 r_3}{r_2}} + \sqrt{r_2^2 + r_3^2 - 2y r_2 r_3},$$

სადაც y არის კუბური განტოლების ერთადერთი ნამდვილი ფესვი:

$$2y^3 - \frac{r_1^2 r_2^2 + r_1^2 r_3^2 + r_2^2 r_3^2}{r_1^2 r_2 r_3} y^2 + \frac{r_2 r_3}{r_1^2} = 0. \quad (2.6)$$

დამტკიცება. პირველი დებულება გამომდინარეობს ლაგრანჟის მეთოდით მიღებული განტოლებათა სისტემის ანალიზიდან ([5], [7], [14], [19], [49]). სნელიუსის კანონიდან და ფერმას პრინციპიდან გამომდინარეობს, რომ L -მაქსიმალური სამკუთხედის სამი ბისექტრისა იკვეთება კოორდინატთა სათავეზე (კონცენტრულ წრეწირთა ცენტრი). ეს დაკვირვება და ელემენტარული გეომეტრიული მოსაზრებები იძლევა ზემოხსენებულ განტოლებას y ორდინატზე და L -ის მაქსიმალურ მნიშვნელობას Z_3 -ზე.

ვთქვათ, S_1, S_2, S_3 კონცენტრული წრეწირებია რადიუსებით r_1, r_2, r_3 ($0 < r_1 < r_2 < r_3$) და ფუნქცია $L: S_1 \times S_2 \times S_3 \rightarrow R_+$ მოცემულია ფორმულით $L(ABC) = |AB| + |BC| + |AC|$, სადაც $A \in S_3, B \in S_2, C \in S_1$.

$$L_{min} = (r_3 - r_2) + (r_2 - r_1) + (r_3 - r_1) = 2(r_3 - r_1).$$

უნაგირის ერთ-ერთი შემთხვევისთვის, კერძოდ, $A(r_3; 0), B(r_2; 0), C(-r_1; 0)$ შემთხვევისთვის შევაშფოთოთ წერტილი B მცირე ε კუთხით. მივიღებთ წერტილს $\tilde{B}(r_2 \cos \varepsilon; r_2 \sin \varepsilon)$. მაშასადამე, $|A\tilde{B}| = \sqrt{r_2^2 + r_3^2 - 2r_2 r_3 \cos \varepsilon}, |C\tilde{B}| = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 \cos \varepsilon}$.

გამოვთვალოთ $L = |A\tilde{B}| + |C\tilde{B}|$ ფუნქციის პირველი რიგის კერძო წარმოებული ε ცვლადით:

$$\frac{\partial L}{\partial \varepsilon} = \frac{r_2 r_3 \sin \varepsilon}{\sqrt{r_2^2 + r_3^2 - 2r_2 r_3 \cos \varepsilon}} - \frac{r_1 r_2 \sin \varepsilon}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 \cos \varepsilon}}.$$

$\frac{\partial L}{\partial \varepsilon} = 0$, როცა $\varepsilon = 0$, რაც იმას ნიშნავს, რომ $\tilde{B}$ კრიტიკული წერტილია.

გამოვთვალოთ $\partial^2 L / \partial \varepsilon^2$:

$$\begin{aligned}\partial^2 L / \partial \varepsilon^2 = & -\frac{(r_2 r_3 \sin \varepsilon)^2}{\sqrt{(r_2^2 + r_3^2 - 2r_2 r_3 \cos \varepsilon)^3}} + \frac{r_2 r_3 \cos \varepsilon}{\sqrt{r_2^2 + r_3^2 - 2r_2 r_3 \cos \varepsilon}} \\ & - \frac{(r_1 r_2 \sin \varepsilon)^2}{\sqrt{(r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 \cos \varepsilon)^3}} - \frac{r_1 r_2 \cos \varepsilon}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 \cos \varepsilon}}\end{aligned}$$

როცა $\varepsilon = 0$, მაშინ $\partial^2 L / \partial \varepsilon^2 > 0$.

ახლა შევაშფოთოთ C წერტილი მცირე δ კუთხით. მივიღებთ წერტილს $\tilde{C}(-r_1 \cos \delta, -r_1 \sin \delta)$. $L = |A\tilde{C}| + |B\tilde{C}|$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \varepsilon} = & -\frac{r_1 r_3 \sin \delta}{\sqrt{r_1^2 + r_3^2 + 2r_1 r_3 \cos \delta}} - \frac{r_1 r_2 \sin \delta}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 \cos \delta}}, \\ \partial^2 L / \partial \varepsilon^2 = & \frac{(r_2 r_3 \sin \delta)^2}{\sqrt{(r_1^2 + r_3^2 + 2r_1 r_3 \cos \delta)^3}} - \frac{r_1 r_3 \cos \delta}{\sqrt{r_1^2 + r_3^2 + 2r_1 r_3 \cos \delta}} \\ & + \frac{(r_1 r_2 \sin \delta)^2}{\sqrt{(r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 \cos \delta)^3}} - \frac{r_1 r_2 \cos \delta}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 \cos \delta}}\end{aligned}$$

როცა $\delta = 0$, მაშინ $\partial L / \partial \delta = 0$, ხოლო $\partial^2 L / \partial \varepsilon^2 < 0$.

მაშასადამე, $\partial L / \partial \varepsilon$ -ს და $\partial L / \partial \delta$ -ს სხვადასხვა ნიშანი აქვთ.

ანალოგიურად განიხილება უნაგირის ორი სხვა შემთხვევაც.

იმისათვის, რომ დავამტკიცოთ, თუ როდის აღწევს პერიმეტრი მაქსიმუმს, გამოვსახოთ იგი, როგორც φ და ψ კუთხეების ფუნქცია, სადაც $\varphi = \angle AOB, \psi = \angle AOC$.

$$\begin{aligned}L(\varphi, \psi) = & |AB| + |BC| + |AC| \\ = & \sqrt{r_2^2 + r_3^2 - 2r_2 r_3 \cos \varphi} + \sqrt{r_1^2 + r_3^2 - 2r_1 r_3 \cos \psi} \\ & + \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\varphi + \psi)}. \\ \frac{\partial L}{\partial \varphi} = & \frac{r_2 r_3 \sin \varphi}{\sqrt{r_2^2 + r_3^2 - 2r_2 r_3 \cos \varphi}} + \frac{r_1 r_2 \sin(\varphi + \psi)}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\varphi + \psi)}} = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \psi} = & \frac{r_1 r_3 \sin \psi}{\sqrt{r_1^2 + r_3^2 - 2r_1 r_3 \cos \psi}} + \frac{r_1 r_2 \sin(\varphi + \psi)}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\varphi + \psi)}} = 0.\end{aligned}$$

აქედან გამომდინარეობს

$$\frac{r_2 r_3 \sin \varphi}{\sqrt{r_2^2 + r_3^2 - 2r_2 r_3 \cos \varphi}} = \frac{r_1 r_3 \sin \psi}{\sqrt{r_1^2 + r_3^2 - 2r_1 r_3 \cos \psi}}$$

თუ მიღებულ ტოლობაში შევიტანთ მარტივი გარდაქმნებით მიღებულ გამოსახულებებს:

$$\cos \psi = \frac{r_1}{r_2} \cos \varphi, \cos(\varphi + \psi) = \frac{r_1}{r_3} \cos \varphi,$$

და ამასთანავე, შემოვიღებთ აღნიშვნას $y = \cos \varphi$, მივიღებთ მესამე ხარისხის განტოლებას

$$2y^3 - \left(\frac{r_2}{r_3} + \frac{r_2 r_3}{r_1^2} + \frac{r_3}{r_2} \right) y^2 + \frac{r_2 r_3}{r_1^2} = 0.$$

y ცვლადის მიმართ განტოლების ამოხსნის შედეგად მივიღებთ:

$$y_1 = \frac{1}{6} \left(\sigma + (\sigma^3 - 54\tau + 6\sqrt{81\tau^2 - 3\sigma^3\tau})^{1/3} + \frac{\sigma^2}{(\sigma^3 - 54\tau + 6\sqrt{81\tau^2 - 3\sigma^3\tau})^{1/3}} \right),$$

$$y_{2,3} = \frac{1}{12} \left(2\sigma - (\sigma^3 - 54\tau + 6\sqrt{81\tau^2 - 3\sigma^3\tau})^{1/3} - \frac{\sigma^2}{(\sigma^3 - 54\tau + 6\sqrt{81\tau^2 - 3\sigma^3\tau})^{1/3}} \right) \pm \frac{1}{12} i\sqrt{3} \left((\sigma^3 - 54\tau + 6\sqrt{81\tau^2 - 3\sigma^3\tau})^{1/3} - \frac{\sigma^2}{(\sigma^3 - 54\tau + 6\sqrt{81\tau^2 - 3\sigma^3\tau})^{1/3}} \right),$$

სადაც

$$\sigma = \frac{r_2}{r_3} + \frac{r_2 r_3}{r_1^2} + \frac{r_3}{r_2}, \quad \tau = \frac{r_2 r_3}{r_1^2}.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

შენიშვნა 2.3. აღსანიშნავია, რომ კრიტიკული წერტილების რაოდენობა და ტიპები აკმაყოფილებს მორსის ტოლობას: $2 - 3 + 1 = 0$, რაც ადასტურებს, რომ ჩვენ სწორად დავადგინეთ ყველა კრიტიკული მაკავშირებელი ციკლი.

თეორემა 2.2 გვთავაზობს შემდგომი კვლევის ორ მიმართულებას: განვაზოგადოთ იგი n კონცენტრულ წრეწირთა შემთხვევისთვის და გამოვიკვლიოთ კონფიგურაციის სხვა ფუნქციების კრიტიკული წერტილები,

როგორცაა ამ წერტილებზე განთავსებული თანაბარი მუხტების კულონის პოტენციალი ([9], [19], [20]).

აქამდე ჩვენ ვიხილავდით სამი კონცენტრული წრეწირის არაგადაგვარებულ სისტემებს, რომლებშიც ყველა რადიუსი განსხვავებულია. მოყვანილი შედეგების დახმარებით შეიძლება ექსტრემალური ციკლების აღწერა იმ შემთხვევებშიც, რომლებშიც ორი ან სამივე რადიუსი ერთმანეთის ტოლია. ბოლო შემთხვევაში პასუხი მარტივია და კარგადაა ცნობილი: მაქსიმალური მაკავშირებელი ციკლი წესიერი სამკუთხედი და მინიმალური ციკლი შედგება სამი თანხვედნილი წერტილისგან. ორი ერთიანი რადიუსის შემთხვევაში ასეთი შეიძლება მივიღოთ, როგორც არაგადაგვარებული შემთხვევების ზღვარი, რაზეც არ შევჩერდებით.

როდესაც წრეწირების რაოდენობა აღემატება სამს, სტაციონარული მაკავშირებელი ციკლების აღწერა არსებითად რთულდება და ჩნდება ახალი ფენომენები. ზოგიერთი ასეთი ფენომენის ჩვენების მიზნით, შემდეგ პარაგრაფში მოვიყვანთ რამდენიმე შედეგს ოთხი კონცენტრული წრეწირის ზოგიერთი სისტემებისთვის.

2.2.2. პერიმეტრის ექსტრემუმები ოთხი კონცენტრული წრეწირის შემთხვევაში

ამ პარაგრაფში შევისწავლით ექსტრემალურ ციკლებს ოთხი კონცენტრული წრეწირის ზოგიერთი სისტემებისთვის და ვაჩვენებთ, რომ სამი წრეწირის შემთხვევისგან განსხვავებით, მაქსიმალური მაკავშირებელი ციკლი შეიძლება არ იყოს ამოზნექილი, რასაც მივყავართ საინტერესო ამოცანებთან და დასკვნებთან. კერძოდ, ზოგიერთ შემთხვევაში საერთოდ არ არსებობს ამოზნექილი მაქსიმალური მაკავშირებელი ციკლი და მაქსიმალური მაკავშირებელი ციკლი იღებს სხვა ფორმას. დავიწყეთ იმ შემთხვევის განხილვით, როდესაც არსებობს ამოზნექილი მაქსიმალური მაკავშირებელი ციკლი.

თეორემა 2.3. ვთქვათ, S_1, S_2, S_3, S_4 ოთხი კონცენტრული წრეწირია, რომელთა რადიუსებია შესაბამისად r_1, r_2, r_3, r_4 ($0 < r_1 < r_2 < r_3 < r_4$) და $P: S_1 \times S_2 \times S_3 \times S_4 \rightarrow R_+$ ფუნქცია მოცემულია ფორმულით $P_{ABCD} = |AB| + |BC| + |CD| + |DA|$, სადაც $A \in S_4, B \in S_3, C \in S_2, D \in S_1$. დავუშვათ, რომ ამ წრეწირებისთვის არსებობს ამოზნექილი მაქსიმალური მაკავშირებელი ციკლი. მაშინ მაქსიმალური ციკლი, ტანგენციალური ოთხკუთხედი, რომლის სიგრძე გამოითვლება ფორმულით

$$P_{max} = 2 \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2 + \frac{r_2 r_3 r_4}{r_1} + \frac{r_1 r_3 r_4}{r_2} + \frac{r_1 r_2 r_4}{r_3} + \frac{r_1 r_2 r_3}{r_4}}, \quad (2.7)$$

და მასში ჩახაზული წრეწირის რადიუსი გამოითვლება ფორმულით

$$r = 2 \sqrt{\frac{(Q - r_1 r_2 r_3)(Q - r_1 r_2 r_4)(Q - r_2 r_3 r_4)(Q - r_1 r_3 r_4)}{r_1 r_2 r_3 r_4 (r_1 r_2 + r_3 r_4)(r_1 r_3 + r_2 r_4)(r_1 r_4 + r_2 r_3)}}, \quad (2.8)$$

სადაც

$$Q = \frac{1}{2}(r_1 r_2 r_3 + r_1 r_2 r_4 + r_1 r_3 r_4 + r_2 r_3 r_4).$$

პერიმეტრს ასევე აქვს რვა აღლუმი, რომლებიც არაგადაგვარებულია რადიუსების ტიპური ოთხეულისთვის.

დამტკიცებისთვის დაგვჭირდება ვარიაციული აღრიცხვის ერთი ზოგადი შემდეგი, ე.წ. ფერმა-სნელიუსის პრინციპი, რომელსაც მოვიყვანთ შემდეგი ლემის ფორმით.

ლემა 2.1. (ფერმა-სნელიუსის პრინციპი). მოცემულია ჩაკეტილი წირი და მის გარეთ აღებული ორი P და Q წერტილი. მაშინ ყოველ R წერტილში, რომელშიც $PR + QR$ უდიდეს ან უმცირეს მნიშვნელობას ღებულობს, PR და QR მონაკვეთები ერთნაირ კუთხეებს ქმნიან თვით წირთან (ე.ი. მის მხებთან).

თეორემის დამტკიცება. $\langle ABCD \rangle$ იყოს ამ წრეწირების ამოზნექილი მაქსიმალური მაკავშირებელი ციკლი. აღვნიშნოთ $\varphi = \angle AOB, \psi = \angle BOC, \angle COD = \pi - \varphi, \angle DOA = \pi - \psi$.

$$P_{ABCD} = |AB| + |BC| + |CD| + |DA|$$

$$|AB| = \sqrt{r_3^2 + r_4^2 - 2r_3r_4 \cos \varphi}$$

$$|BC| = \sqrt{r_2^2 + r_3^2 - 2r_2r_3 \cos \psi}$$

$$|CD| = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2 \cos \varphi}$$

$$|DA| = \sqrt{r_1^2 + r_4^2 + 2r_1r_4 \cos \psi}$$

$$P_{ABCD} = \sqrt{r_3^2 + r_4^2 - 2r_3r_4 \cos \varphi} + \sqrt{r_2^2 + r_3^2 - 2r_2r_3 \cos \psi} + \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2 \cos \varphi} + \sqrt{r_1^2 + r_4^2 + 2r_1r_4 \cos \psi}$$

$$\frac{\partial P}{\partial \varphi} = \frac{r_3r_4 \sin \varphi}{\sqrt{r_3^2 + r_4^2 - 2r_3r_4 \cos \varphi}} - \frac{r_1r_2 \sin \varphi}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2 \cos \varphi}} = 0,$$

$$\frac{\partial P}{\partial \psi} = \frac{r_2r_3 \sin \psi}{\sqrt{r_2^2 + r_3^2 - 2r_2r_3 \cos \psi}} - \frac{r_1r_4 \sin \psi}{\sqrt{r_1^2 + r_4^2 + 2r_1r_4 \cos \psi}} = 0.$$

აქედან

$$\cos \varphi = \frac{1}{2} \left(\frac{r_1r_2}{r_3r_4} \cdot \frac{r_3^2 + r_4^2}{r_1r_2 + r_3r_4} - \frac{r_3r_4}{r_1r_2} \cdot \frac{r_1^2 + r_2^2}{r_1r_2 + r_3r_4} \right),$$

$$\cos \psi = \frac{1}{2} \left(\frac{r_1r_4}{r_2r_3} \cdot \frac{r_2^2 + r_3^2}{r_1r_4 + r_2r_3} - \frac{r_2r_3}{r_1r_4} \cdot \frac{r_1^2 + r_4^2}{r_1r_4 + r_2r_3} \right).$$

თუ ამ მნიშვნელობებს შევიტანთ P -ს ფორმულაში, მივიღებთ

$$P_{max} = 2 \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2 + \frac{r_2r_3r_4}{r_1} + \frac{r_1r_3r_4}{r_2} + \frac{r_1r_2r_4}{r_3} + \frac{r_1r_2r_3}{r_4}}$$

მოყვანილი ლემიდან და ჩვენი მსჯელობიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ ამოზნექილი მაქსიმალური ციკლი ე.წ. ტანგენციალური ოთხკუთხედაა, ანუ მას აქვს ჩახაზული წრეწირი. ცნობილი ფორმულა ტანგენციალური ოთხკუთხედში ჩახაზული წრეწირის რადიუსისთვის [20] ჩვენს შემთხვევაში გამოიყურება შემდეგნაირად:

$$r = 2 \sqrt{\frac{(Q - r_1r_2r_3)(Q - r_1r_2r_4)(Q - r_2r_3r_4)(Q - r_1r_3r_4)}{r_1r_2r_3r_4(r_1r_2 + r_3r_4)(r_1r_3 + r_2r_4)(r_1r_4 + r_2r_3)}},$$

სადაც

$$Q = \frac{1}{2}(r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + r_1r_3r_4 + r_2r_3r_4).$$

ის ფაქტი, რომ ამოზნექილი სტაციონარული მაკავშირებელი ციკლი მაქსიმალურია, მარტივად მტკიცდება ასეთივე არგუმენტებით, როგორც სამი წრეწირის შემთხვევაში. ამასთან ვიცით, რომ ყველა ალლუმი პერიმეტრის სტაციონალური კონფიგურაციაა. რადგან ალლუმების რაოდენობა ამ შემთხვევაში უდრის რვას, მთლიანობაში გამოდის ათი სტაციონარული მაკავშირებელი ციკლი, როგორც გამოცხადებულია თეორემაში. ამგვარად, თეორემის დამტკიცების დასამთავრებლად უნდა ვაჩვენოთ, რომ ყველა ალლუმი პერიმეტრის არაგადაგვარებული სტაციონალური კონფიგურაციაა. ამისთვის გამოვთვლით პერიმეტრის ჰესიანის მნიშვნელობას ყველა ალლუმში.

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$\varphi = \angle AOB, \psi = \angle BOC, \chi = \angle COD.$$

$$HessP = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 P}{\partial \varphi^2} & \frac{\partial^2 P}{\partial \varphi \partial \psi} & \frac{\partial^2 P}{\partial \varphi \partial \chi} \\ \frac{\partial^2 P}{\partial \psi \partial \varphi} & \frac{\partial^2 P}{\partial \psi^2} & \frac{\partial^2 P}{\partial \psi \partial \chi} \\ \frac{\partial^2 P}{\partial \chi \partial \varphi} & \frac{\partial^2 P}{\partial \chi \partial \psi} & \frac{\partial^2 P}{\partial \chi^2} \end{pmatrix}$$

სადაც

$$\begin{aligned} P_{ABCD} = & \sqrt{r_3^2 + r_4^2 - 2r_3r_4 \cos \varphi} + \sqrt{r_2^2 + r_3^2 - 2r_2r_3 \cos \psi} + \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2 \cos \chi} + \\ & \sqrt{r_1^2 + r_4^2 + 2r_1r_4 \cos(2\pi - \varphi - \psi - \chi)} \\ \frac{\partial^2 P}{\partial \varphi^2} = & -\frac{r_3^2 r_4^2 \sin^2 \varphi}{(r_3^2 + r_4^2 - 2r_3r_4 \cos \varphi)^{\frac{3}{2}}} + \frac{r_3 r_4 \cos \varphi}{(r_3^2 + r_4^2 - 2r_3r_4 \cos \varphi)^{\frac{1}{2}}} \\ & - \frac{r_1^2 r_4^2 \sin^2 (2\pi - \varphi - \psi - \chi)}{(r_1^2 + r_4^2 - 2r_1r_4 \cos (2\pi - \varphi - \psi - \chi))^{\frac{3}{2}}} \\ & + \frac{r_1 r_4 \cos \varphi}{(r_1^2 + r_4^2 - 2r_1r_4 \cos (2\pi - \varphi - \psi - \chi))^{\frac{1}{2}}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 P}{\partial \psi^2} = & -\frac{r_2^2 r_3^2 \sin^2 \psi}{(r_2^2 + r_3^2 - 2r_2 r_3 \cos \psi)^{\frac{3}{2}}} + \frac{r_2 r_3 \cos \psi}{(r_2^2 + r_3^2 - 2r_2 r_3 \cos \psi)^{\frac{1}{2}}} \\ & - \frac{r_1^2 r_4^2 \sin^2 (2\pi - \varphi - \psi - \chi)}{(r_1^2 + r_4^2 - 2r_1 r_4 \cos (2\pi - \varphi - \psi - \chi))^{\frac{3}{2}}} \\ & + \frac{r_1 r_4 \cos \varphi}{(r_1^2 + r_4^2 - 2r_1 r_4 \cos (2\pi - \varphi - \psi - \chi))^{\frac{1}{2}}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 P}{\partial \chi^2} = & -\frac{r_1^2 r_2^2 \sin^2 \chi}{(r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \chi)^{\frac{3}{2}}} + \frac{r_1 r_2 \cos \chi}{(r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \chi)^{\frac{1}{2}}} \\ & - \frac{r_1^2 r_4^2 \sin^2 (2\pi - \varphi - \psi - \chi)}{(r_1^2 + r_4^2 - 2r_1 r_4 \cos (2\pi - \varphi - \psi - \chi))^{\frac{3}{2}}} \\ & + \frac{r_1 r_4 \cos \varphi}{(r_1^2 + r_4^2 - 2r_1 r_4 \cos (2\pi - \varphi - \psi - \chi))^{\frac{1}{2}}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 P}{\partial \varphi \partial \psi} = \frac{\partial^2 P}{\partial \varphi \partial \chi} = \frac{\partial^2 P}{\partial \psi \partial \varphi} = \frac{\partial^2 P}{\partial \psi \partial \chi} = \frac{\partial^2 P}{\partial \chi \partial \varphi} = \frac{\partial^2 P}{\partial \chi \partial \psi} \\ = -\frac{r_1^2 r_4^2 \sin^2 (2\pi - \varphi - \psi - \chi)}{(r_1^2 + r_4^2 - 2r_1 r_4 \cos (2\pi - \varphi - \psi - \chi))^{\frac{3}{2}}} \\ + \frac{r_1 r_4 \cos \varphi}{(r_1^2 + r_4^2 - 2r_1 r_4 \cos (2\pi - \varphi - \psi - \chi))^{\frac{1}{2}}}.\end{aligned}$$

გამოვთვალოთ ჰესიანი თითოეული შემთხვევისთვის. დავაფიქსიროთ დიდ წრეწირზე წერტილი $A(r_4; 0)$;

1) განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც A, B, C, D წერტილები კონცენტრიდან ერთ მხარეს მდებარეობენ, ანუ

$$A(r_4; 0), B(r_3; 0), C(r_2; 0), D(r_1; 0).$$

$$\begin{aligned}\varphi = 0, \psi = 0, \chi = 0; \\ \frac{\partial^2 P}{\partial \varphi^2} = \frac{r_3 r_4}{r_4 - r_3} + \frac{r_1 r_4}{r_4 - r_1}, \quad \frac{\partial^2 P}{\partial \psi^2} = \frac{r_2 r_3}{r_3 - r_2} + \frac{r_1 r_4}{r_4 - r_1}, \\ \frac{\partial^2 P}{\partial \chi^2} = \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} + \frac{r_1 r_4}{r_4 - r_1}, \\ \frac{\partial^2 P}{\partial \varphi \partial \psi} = \frac{\partial^2 P}{\partial \varphi \partial \chi} = \frac{\partial^2 P}{\partial \psi \partial \varphi} = \frac{\partial^2 P}{\partial \psi \partial \chi} = \frac{\partial^2 P}{\partial \chi \partial \varphi} = \frac{\partial^2 P}{\partial \chi \partial \psi} = \frac{r_1 r_4}{r_4 - r_1}.\end{aligned}$$

$$\Delta > 0.$$

2) შემთხვევა, როდესაც წერტილები B, C, D მდებარეობენ A -ს მოპირდაპირე მხარეს, ანუ $A(r_4; 0), B(-r_3; 0), C(-r_2; 0), D(-r_1; 0)$.

$$\begin{aligned} \varphi &= \pi, \psi = 0, \chi = 0; \\ \frac{\partial^2 P}{\partial \varphi^2} &= -\frac{r_3 r_4}{r_3 + r_4} - \frac{r_1 r_4}{r_1 + r_4}, \\ \frac{\partial^2 P}{\partial \psi^2} &= \frac{r_2 r_3}{r_3 - r_2} - \frac{r_1 r_4}{r_1 + r_4}, \\ \frac{\partial^2 P}{\partial \chi^2} &= \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} - \frac{r_1 r_4}{r_1 + r_4}, \\ \frac{\partial^2 P}{\partial \varphi \partial \psi} &= \frac{\partial^2 P}{\partial \varphi \partial \chi} = \frac{\partial^2 P}{\partial \psi \partial \varphi} = \frac{\partial^2 P}{\partial \psi \partial \chi} = \frac{\partial^2 P}{\partial \chi \partial \varphi} = \frac{\partial^2 P}{\partial \chi \partial \psi} = -\frac{r_1 r_4}{r_1 + r_4}. \\ \Delta &= -\frac{2r_1^2 r_2^2 r_3 r_4}{(r_2 - r_1)(r_3 - r_2)(r_1 + r_4)}. \\ \Delta &< 0. \end{aligned}$$

3) A, C, D წერტილები მდებარეობენ კონცენტრიდან ერთ მხარეს, ხოლო B – მოპირდაპირე მხარეს. $A(r_4; 0), B(-r_3; 0), C(r_2; 0), D(r_1; 0)$.

$$\begin{aligned} \varphi &= \pi, \psi = \pi, \chi = 0; \\ \frac{\partial^2 P}{\partial \varphi^2} &= -\frac{r_3 r_4}{r_3 + r_4} - \frac{r_1 r_4}{r_4 - r_1}, \\ \frac{\partial^2 P}{\partial \psi^2} &= -\frac{r_2 r_3}{r_2 + r_3} - \frac{r_1 r_4}{r_4 - r_1}, \\ \frac{\partial^2 P}{\partial \chi^2} &= \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} - \frac{r_1 r_4}{r_4 - r_1}, \\ \frac{\partial^2 P}{\partial \varphi \partial \psi} &= \frac{\partial^2 P}{\partial \varphi \partial \chi} = \frac{\partial^2 P}{\partial \psi \partial \varphi} = \frac{\partial^2 P}{\partial \psi \partial \chi} = \frac{\partial^2 P}{\partial \chi \partial \varphi} = \frac{\partial^2 P}{\partial \chi \partial \psi} = -\frac{r_1 r_4}{r_4 - r_1}. \\ \Delta &= \frac{2r_1^2 r_2 r_3 r_4^2}{(r_2 - r_1)(r_4 - r_1)(r_3 + r_4)}. \\ \Delta &> 0. \end{aligned}$$

4) A, D წერტილები მდებარეობენ კონცენტრიდან ერთ მხარეს, ხოლო B, C – მოპირდაპირე მხარეს. $A(r_4; 0), B(-r_3; 0), C(-r_2; 0), D(r_1; 0)$.

$$\varphi = \pi, \psi = 0, \chi = \pi;$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 P}{\partial \varphi^2} &= -\frac{r_3 r_4}{r_3 + r_4} - \frac{r_1 r_4}{r_4 - r_1}, \\
\frac{\partial^2 P}{\partial \psi^2} &= \frac{r_2 r_3}{r_3 - r_2} - \frac{r_1 r_4}{r_4 - r_1}, \\
\frac{\partial^2 P}{\partial \chi^2} &= -\frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} - \frac{r_1 r_4}{r_4 - r_1}, \\
\frac{\partial^2 P}{\partial \varphi \partial \psi} &= \frac{\partial^2 P}{\partial \varphi \partial \chi} = \frac{\partial^2 P}{\partial \psi \partial \varphi} = \frac{\partial^2 P}{\partial \psi \partial \chi} = \frac{\partial^2 P}{\partial \chi \partial \varphi} = \frac{\partial^2 P}{\partial \chi \partial \psi} = -\frac{r_1 r_4}{r_4 - r_1}. \\
\Delta &= \frac{2r_1 r_2^2 r_3^2 r_4^2}{(r_2 + r_1)(r_2 + r_3)(r_3 + r_4)(r_4 - r_1)}. \\
\Delta &> 0.
\end{aligned}$$

5) A, C წერტილები მდებარეობენ კონცენტრიდან ერთ მხარეს, ხოლო B, D – მოპირდაპირე მხარეს. $A(r_4; 0), B(-r_3; 0), C(r_2; 0), D(-r_1; 0)$.

$$\begin{aligned}
\varphi &= \pi, \psi = \pi, \chi = \pi; \\
\frac{\partial^2 P}{\partial \varphi^2} &= -\frac{r_3 r_4}{r_3 + r_4} - \frac{r_1 r_4}{r_1 + r_4}, \\
\frac{\partial^2 P}{\partial \psi^2} &= -\frac{r_2 r_3}{r_2 + r_3} - \frac{r_1 r_4}{r_1 + r_4}, \\
\frac{\partial^2 P}{\partial \chi^2} &= -\frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} - \frac{r_1 r_4}{r_1 + r_4}, \\
\frac{\partial^2 P}{\partial \varphi \partial \psi} &= \frac{\partial^2 P}{\partial \varphi \partial \chi} = \frac{\partial^2 P}{\partial \psi \partial \varphi} = \frac{\partial^2 P}{\partial \psi \partial \chi} = \frac{\partial^2 P}{\partial \chi \partial \varphi} = \frac{\partial^2 P}{\partial \chi \partial \psi} = -\frac{r_1 r_4}{r_1 + r_4}. \\
\Delta &= -\frac{2r_1 r_2 r_3 r_4 \{(r_3 + r_4)r_2 + r_3 r_4\} r_1 + r_2 r_3 r_4}{(r_2 + r_1)(r_2 + r_3)(r_3 + r_4)(r_4 + r_1)}. \\
\Delta &< 0.
\end{aligned}$$

6) A, B, D წერტილები მდებარეობენ კონცენტრიდან ერთ მხარეს, ხოლო C – მოპირდაპირე მხარეს. $A(r_4; 0), B(r_3; 0), C(-r_2; 0), D(r_1; 0)$.

$$\begin{aligned}
\varphi &= 0, \psi = \pi, \chi = \pi; \\
\frac{\partial^2 P}{\partial \varphi^2} &= \frac{r_3 r_4}{r_4 - r_3} + \frac{r_1 r_4}{r_4 - r_1}, \\
\frac{\partial^2 P}{\partial \psi^2} &= -\frac{r_2 r_3}{r_2 + r_3} + \frac{r_1 r_4}{r_4 - r_1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 P}{\partial \chi^2} &= -\frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} + \frac{r_1 r_4}{r_4 - r_1}, \\ \frac{\partial^2 P}{\partial \varphi \partial \psi} &= \frac{\partial^2 P}{\partial \varphi \partial \chi} = \frac{\partial^2 P}{\partial \psi \partial \varphi} = \frac{\partial^2 P}{\partial \psi \partial \chi} = \frac{\partial^2 P}{\partial \chi \partial \varphi} = \frac{\partial^2 P}{\partial \chi \partial \psi} = \frac{r_1 r_4}{r_4 - r_1}, \\ \Delta &= -\frac{2r_1^2 r_2 r_3^2 r_4 (r_2 + r_4)}{(r_2 + r_1)(r_2 + r_3)(r_4 - r_3)(r_4 - r_1)}, \\ \Delta &< 0.\end{aligned}$$

7) A, B წერტილები მდებარეობენ კონცენტრიდან ერთ მხარეს, ხოლო C, D – მოპირდაპირე მხარეს. $A(r_4; 0), B(r_3; 0), C(-r_2; 0), D(-r_1; 0)$.

$$\begin{aligned}\varphi &= 0, \psi = \pi, \chi = 0; \\ \frac{\partial^2 P}{\partial \varphi^2} &= \frac{r_3 r_4}{r_4 - r_3} + \frac{r_1 r_4}{r_1 + r_4}, \\ \frac{\partial^2 P}{\partial \psi^2} &= -\frac{r_2 r_3}{r_2 + r_3} + \frac{r_1 r_4}{r_1 + r_4}, \\ \frac{\partial^2 P}{\partial \chi^2} &= \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} + \frac{r_1 r_4}{r_1 + r_4}, \\ \frac{\partial^2 P}{\partial \varphi \partial \psi} &= \frac{\partial^2 P}{\partial \varphi \partial \chi} = \frac{\partial^2 P}{\partial \psi \partial \varphi} = \frac{\partial^2 P}{\partial \psi \partial \chi} = \frac{\partial^2 P}{\partial \chi \partial \varphi} = \frac{\partial^2 P}{\partial \chi \partial \psi} = \frac{r_1 r_4}{r_1 + r_4}, \\ \Delta &= -\frac{2r_1 r_2 r_3^2 r_4^2}{(r_2 + r_3)(r_4 - r_3)(r_4 + r_1)}, \\ \Delta &< 0.\end{aligned}$$

8) A, B, C წერტილები მდებარეობენ კონცენტრიდან ერთ მხარეს, ხოლო D – მოპირდაპირე მხარეს. $A(r_4; 0), B(r_3; 0), C(r_2; 0), D(-r_1; 0)$.

$$\begin{aligned}\varphi &= 0, \psi = 0, \chi = \pi. \\ \frac{\partial^2 P}{\partial \varphi^2} &= \frac{r_3 r_4}{r_4 - r_3} + \frac{r_1 r_4}{r_1 + r_4}, \\ \frac{\partial^2 P}{\partial \psi^2} &= \frac{r_2 r_3}{r_3 - r_2} + \frac{r_1 r_4}{r_1 + r_4}, \\ \frac{\partial^2 P}{\partial \chi^2} &= -\frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} + \frac{r_1 r_4}{r_1 + r_4}, \\ \frac{\partial^2 P}{\partial \varphi \partial \psi} &= \frac{\partial^2 P}{\partial \varphi \partial \chi} = \frac{\partial^2 P}{\partial \psi \partial \varphi} = \frac{\partial^2 P}{\partial \psi \partial \chi} = \frac{\partial^2 P}{\partial \chi \partial \varphi} = \frac{\partial^2 P}{\partial \chi \partial \psi} = \frac{r_1 r_4}{r_1 + r_4}.\end{aligned}$$

$$\Delta = -\frac{r_1^2 r_2^2 r_4}{(r_1 + r_2)(r_3 - r_2)(r_3 + r_4)(r_1^2 + r_4^2)(r_1 + r_4)^2} [(r_1 + r_3)r_4^4 + (r_3 - 1)(r_1 + r_3)r_4^3 + r_1(r_1 - 1)(r_1 + r_3)r_4^2 + r_1 r_3(r_1^2 + r_1 r_2 - r_1 + r_3)r_4 + r_1^2 r_3(r_3 - r_1)].$$

ამ გამოთვლებიდან ნათლად ჩანს, რომ ჰესიანი ყველა ადლუმში რაციონალური ფუნქციაა და ამიტომ, ყველა ეს ჰესიანი არანულოვანია რადიუსების ტიპიური მნიშვნელობებისთვის.

თეორემა 2.3 დამტკიცებულია.

თეორემა 2.3-დან გამომდინარეობს შემდეგი საინტერესო შედეგი. რადგან (2.8) ფორმულაში ფესვის შიდა წილადის მრიცხველი უნდა იყოს დადებითი, ეს გვადლევს ამოზნექილი მაქსიმალური ციკლის არსებობის აუცილებელ პირობას.

წინადადება 2.3. თეორემა 2.3 პირობებში, ამოზნექილი მაქსიმალური ციკლის არსებობის აუცილებელი პირობაა:

$$(Q - r_1 r_2 r_3)(Q - r_1 r_2 r_4)(Q - r_2 r_3 r_4)(Q - r_1 r_3 r_4) > 0,$$

სადაც

$$Q = \frac{1}{2}(r_1 r_2 r_3 + r_1 r_2 r_4 + r_1 r_3 r_4 + r_2 r_3 r_4).$$

შენიშვნა 2.4. აქედან გამომდინარეობს, რომ რადიუსების ზოგიერთი ოთხეულებისთვის არ არსებობს ამოზნექილი მაქსიმალური ციკლი. მაგალითად, თუ რადიუსების ოთხეულია (1, 5, 6, 7), მაშინ მრიცხველი უარყოფითია და ამოზნექილი მაქსიმალური ციკლი არ არსებობს. კომპიუტერის დახმარებით შევამოწმეთ, რომ ამ შემთხვევაში მაქსიმალურ ციკლს აქვს "ისრის" ფორმა, ანუ იგი არამოზნექილი არათვითთანამკვეთი ოთხკუთხედი. არსებობენ ასევე მაგალითები, როდესაც მაქსიმალური ციკლი ემთხვევა მაქსიმალურ ადლუმს. ამგვარად, ამ შემთხვევაში მაქსიმალური მაკავშირებელი ციკლის ფორმის დადგენა არატრივიალური ამოცანაა.

გვიჩნდება ასევე ბუნებრივი კითხვა, არის თუ არა ზემოთმოყვანილი აუცილებელი პირობა საკმარისი. რადგან ვიცით სავარაუდო ჩახაზული G წრეწირის რადიუსი და ცენტრი, ვირტუალური მაქსიმალური ციკლის არსებობა

შეიძლება შევამოწმოთ ე.წ. პონსელეს ტეხილის აგების პროცესის დახმარებით. სახელდობრ, A წერტილიდან გავავლოთ მხები G წრეწირთან და ვიპოვოთ მისი თანაკვეთის წერტილი მეორე წრეწირთან და გავიმეოროთ ეს პროცესი კიდევ ოთხჯერ. ცხადია, რომ ამოზნექილი ციკლი არსებობს მაშინ და მხოლოდ მაშინ როდესაც მეოთხე ნაბიჯზე მოვხვდებით საწყის A წერტილში. ამ პროცესის განხორციელება კონკრეტულ მაგალითებში საკმაოდ მარტივია GeoGebra პროგრამის დახმარებით. ჩატარებული კომპიუტერული ექსპერიმენტები ადასტურებენ, რომ ეს აუცილებელი პირობა საკმარისია, მაგრამ ამ ფაქტის ზოგადი დამტკიცება ჯერ ვერ მოვახერხეთ.

2.3. მაკავშირებელი ციკლების ორიენტირებული ფართობის ექსტრემუმები

A ორიენტირებული ფართობისთვის სიტუაცია უფრო რთულია და მისი კრიტიკული კონფიგურაციების პოვნა არც ისე მარტივია. თუმცა, შესაძლებელია იმის ჩვენება, რომ ის ასევე მორსის ფუნქციაა, რაც საშუალებას მოგვცემს გამოვიყენოთ მორსის თეორიის შედეგები მისი კრიტიკული წერტილების რიცხვისა და მორსის ტიპების საპოვნელად. A ფუნქციასთან მუშაობისას უფრო მოსახერხებელია დეკარტული კოორდინატების და სამკუთხედის ფორმულის გამოყენება ორიენტირებული ფართობისთვის. კერძოდ, ნებისმიერი n -სთვის გამოყენებული ფორმულიდან

$$2A = \sum (x_i y_{i+1} - y_i x_{i+1}), \quad (2.9)$$

A -ს გრადიენტი იქნება

$$\nabla A = (y_2 - y_n, x_2 - x_n, y_3 - y_2, x_3 - x_2, \dots, y_n - y_{n-1}, x_n - x_{n-1}).$$

გვაინტერესებს A -ს კრიტიკული წერტილები შემდეგი შეზღუდვით

$$g_i = x_i^2 + y_i^2 - 1 = 0.$$

ახლა კრიტიკული წერტილების კოორდინატთა განტოლებები ადვილად მიიღება ლაგრანჟის მამრავლთა მეთოდის გამოყენებით. გასათვალისწინებელია ის ფაქტი, რომ იაკობის მატრიცის ყველა კომპონენტი, რომელიც შედგება L -ის გრადიენტებით და შეზღუდვებით, წრფივია. L -ის გრადიენტი არის g_i -ის გრადიენტთა წრფივი კომბინაცია, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ (3×4) - მატრიცის რანგი 3-ზე ნაკლებია. ეს კი ეკვივალენტურია მატრიცის ნებისმიერი ორი (3×3) მინორის გაქრობის. მიღებული განტოლებები მესამე ხარისხის განტოლებებია და შეზღუდვების გათვალისწინებით მივიღებთ ოთხ ალგებრულ განტოლებას ოთხი ცვლადით. [23]-ში განვითარებული შტურმის თეორემის შედეგების ან გამოზოგადების გამოყენებით შესაძლებელია ალგორითმულად ვიპოვოთ ამ სისტემის ამონახსნთა ზუსტი რიცხვი და მინიმალური მაკავშირებელი ციკლის წერტილები ნებისმიერი სიზუსტით. ეს კი იძლევა ჩვენი ამოცანის კონცეპტუალურ ამოხსნას. თუმცადა, სირთულეებთან არის დაკავშირებული n რაოდენობის განტოლებებისგან შედგენილი სისტემის ანალიზი. ქვემოთ წარმოდგენილი იქნება შედეგები, რომელთა მიღებაც ამ გზით არის შესაძლებელი იმ შემთხვევისთვის, როდესაც $n = 3$.

თეორემა 2.4. სამი კონცენტრული წრეწირისთვის A ფუნქციის კრიტიკული კონფიგურაციების რაოდენობა უდრის 4-ს: მაქსიმუმი, მინიმუმი და ორი არაგადაგვარებული უნაგირის ტიპის კონფიგურაცია. ამასთან, A -ს გლობალურ ექსტრემუმათა მნიშვნელობები შესაძლებელია წარმოდგენილ იქნას, როგორც ცხადად მოცემული ალგებრული განტოლების ფესვები.

დამტკიცება. ამ შემთხვევაში მიზანშეწონილია, გამოვიყენოთ დეკარტული კოორდინატები და ლაგრანჟის მამრავლები. როგორც პერიმეტრის ფუნქციის შემთხვევაში, მოსახერხებელია რადიუსების აღნიშვნა a, b, c -ით და წერტილის დაფიქსირება განაპირა წრეწირზე $p_3 = (c; 0)$ დაყენებით. დანარჩენი ორი წერტილის კოორდინატები აღინიშნება $p_2 = (x; y)$ და $p_1 = (u; v)$. მაშინ

$$2A(x, y, u, v) = xv - uy + cy - cv, \quad (2.10)$$

რომელიც არის ჩვენი ამოცანის სამიზნე ფუნქცია. ასევე, გვაქვს ორი შეზღუდვა:

$$x^2 + y^2 = b^2, \quad u^2 + v^2 = a^2.$$

შემოვიტანოთ ამ ამოცანის ლაგრანჟის ფუნქცია:

$$L = xv - uy + cy - cv + \alpha(x^2 + y^2 - b^2) + \beta(u^2 + v^2 - a^2).$$

ლაგრანჟის ფუნქციის გრადიენტის გამოთვლით ადვილად მოწმდება, რომ ამ გრადიენტის მატრიცის განულების პირობა იძლევა p_2 და p_3 წერტილების კოორდინატებზე შემდეგ განტოლებებს (თუ $y \neq 0$):

$$v = \frac{x(c - u)}{y}, \quad v = \frac{u(c - x)}{y},$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ $x = u$ და სტაციონარულ კონფიგურაციაში გვაქვს ტოლობა

$$v = \frac{x(c - x)}{\sqrt{b^2 - x^2}}$$

x -ის სტაციონარული მნიშვნელობის პოვნა შესაძლებელია შემდეგნაირად: ჩავსვათ ეს გამოსახულებები შეზღუდვებში და მივიღებთ შემდეგ განტოლებას x -სთვის:

$$x^2 + \frac{x^2(c - x)^2}{b^2 - x^2} - a^2 = 0.$$

საბოლოოდ, მივიღებთ კუბურ განტოლებას

$$2cx^3 - (a^2 + b^2 + c^2)x^2 + a^2b^2 = 0, \quad (2.11)$$

და x უნდა იყოს ამ განტოლების ერთ-ერთი ნამდვილი ფესვი. ცხადი ფორმულები ამ განტოლების ფესვებისთვის შეიძლება მივიღოთ სტანდარტული გარდაქმნებით და კარდანო-ტარტალიას ფორმულის გამოყენებით, გვექნება

$$x = \frac{1}{6} \left(\frac{c^2(a^2 + b^2 + c^2)^2}{\sigma} + \frac{\sigma}{c^3} + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{c} \right), \quad (2.12)$$

სადაც

$$\sigma = \left[-54c^8a^2b^2 + c^6(a^2 + b^2 + c^2)^3 + 6\sqrt{3}\sqrt{27c^{16}a^4b^4 - c^{14}(a^2 + b^2 + c^2)^3a^2b^2} \right]^{1/3}.$$

ჩვენი საბოლოო მიზანია დავადგინოთ სტაციონარული მაკავშირებელი ციკლების რაოდენობა და ტოპოლოგიური თვისებები, ისეთები, როგორებიცაა

არაგადაგვარეულობა და მორსის ინდექსები. ამისთვის კი უნდა ჯერ ვიპოვოთ (2.11) განტოლების ნამდვილი ფესვების რაოდენობა და განლაგება, რისი გაკეთება პარამეტრების ზოგადი მნიშვნელობებისთვის მხოლოდ (2.12) ფორმულის გამოყენებით საკმაოდ რთული იქნებოდა. ამიტომ ჩვენ გამოვიყენებთ ალგებრული გეომეტრიის ტოპოლოგიურ შედეგებს. უპირველეს ყოვლისა, გამოვიყენებთ დეკარტეს ნიშნების წესს და გამოვთვლით (2.11) კოეფიციენტთა ნიშნების ცვლილების რაოდენობას. ამ გზით ადვილად დავადგენთ, რომ პარამეტრების ნებისმიერი მნიშვნელობებისთვის (2.11) განტოლებას აქვს ზუსტად ერთი უარყოფითი ფესვი, ხოლო დადებითი ნამდვილი ფესვების რაოდენობა უდრის ან ორს ან ნულს.

რადგან სტაციონარულ კონფიგურაციაში სრულდება $x = u$, ხოლო საწყისი ამოცანის პირობებიდან გამომდინარე, u უცნობის აბსოლუტური სიდიდე არ აღემატება a -ს, ჩვენ უნდა ვიპოვოთ (2.11) განტოლების ნამდვილ ფესვთა რაოდენობა $(-a; a)$ ინტერვალში. აღვნიშნოთ $P(x)$ -ით (2.11) განტოლების მარცხენა მხარე. ადვილად მოწმდება, რომ $P(-a) < 0, P(0) > 0, P(a) < 0$. აქედან გამომდინარეობს, რომ $P(x)$ -ის ნამდვილ ფესვთა რაოდენობა უდრის სამს და ორი მათგანი, $x_1 < 0, x_2 > 0$ ეკუთვნის $(-a; a)$ ინტერვალს. ცხადია, რომ ორივე ამ ფესვისთვის არსებობს ორდინატის ორი სტაციონარული მნიშვნელობა. ამგვარად, სულ არსებობს ოთხი სტაციონარული ციკლი, სახელდობრ, ორი წყვილი და თითო წყვილის ციკლები სიმეტრიულია აბსცისის ღერძის მიმართ.

დანარჩენი შესაძლო კრიტიკული წერტილების მისაღებად უნდა განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $y = 0$. მაშინ გვაქვს $x = \pm b$ და ადვილად მოწმდება, რომ ასეთი სტაციონარული ციკლი არ არსებობს.

ამგვარად, სტაციონარული ციკლების რაოდენობა უდრის ოთხს და დაგვრჩა მათი ტოპოლოგიური ტიპების დადგენა. თუ დავუშვებთ, რომ A -ს ჰესიანი ყველა ამ წერტილში არ უდრის ნულს, მაშინ სიმეტრიის გამო, თითო წყვილში მორსის

ინდექსების ჯამი უდრის ორს. ანუ ერთ წყვილში გვაქვს მაქსიმუმი და მინიმუმი, მეორეში კი ორი არაგადაგვარებული უნაგირის ტიპის კრიტიკული წერტილი.

გამოვთვლით რა ჰესიანის მნიშვნელობებს კრიტიკულ წერტილებში, რომლებისთვისაც $x = u$, შევამჩნევთ, რომ ისინი არანულოვანია. აქედან გამომდინარე, ეს წერტილები არის A -ს არაგადაგვარებული კრიტიკული წერტილები. ახლა ვაჩვენოთ, რომ გლობალურად მაქსიმალური და გლობალურად მინიმალური მაკავშირებელი ციკლები შეესაბამება ორ წერტილს, რომლებისთვისაც $x = x_1$. ამის დასამტკიცებლად, გამოვიყენოთ შემდეგი გეომეტრიული არგუმენტი:

დამაკავშირებელი ციკლი (p_1, p_2, p_3) მაქსიმალურია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ p_2 და p_3 წერტილების მცირედით წანაცვლება ამცირებს A -ს მნიშვნელობას. გასათვალისწინებელია, რომ ეს შეიძლება მოხდეს მხოლოდ იმ შემთხვევაში, თუ S_i -ის მხები p_i წერტილში პარალელურია სეგმენტის $[p_j, p_3]$. მართლაც, p_i წერტილის მცირედით გადაადგილება იძლევა სამკუთხედს იმავე ფუძით, ამიტომ ფართობი მცირდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ ახალი სიმაღლე უფრო მცირეა თავდაპირველთან შედარებით. ამრიგად, ცხადია, რომ ეს მოხდება მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როდესაც აბსცისა უარყოფითია. ამიტომ მაქსიმუმი და მინიმუმი შეესაბამება $x = x_1$. მათი არაგადაგვარებულობა მტკიცდება განსაკუთრებულობათა თეორიის სტანდარტული არგუმენტით [4].

რადგან ჩვენს შემთხვევაში A ფუნქცია არაგადაგვარებული კვადრატული ფორმაა, სტაციონარული კონფიგურაციის მიდამოში ადვილად მოწმდება, რომ მისი შეზღუდვაც ორი წრეწირის ნამრავლის მხებ სივრცეზე არაგადაგვარებულია. რადგან უკვე ვიცით, რომ ექსტრემუმები შეესაბამება $x = x_1$ შემთხვევას, მორსის ფორმულიდან ეილერის მახასიათებლისთვის გამომდინარეობს, რომ $x = x_2$ შემთხვევას შეესაბამება ორი უნაგირი. უფრო დეტალურად, რადგან ტორის ეილერის მახასიათებელი უდრის ნულს, მორსის ტოლობა ამ სიტუაციაში ოთხი კრიტიკული წერტილისთვის იღებს $1 - 2 + 1 = 0$ ფორმას. რადგან უკვე ვიპოვეთ

მაქსიმუმი და მინიმუმი, დავასკვნით, რომ დანარჩენი ორი სტაციონარული ციკლი უნაგირებია.

თეორემის ბოლო დებულება გამომდინარეობს იმ ფაქტიდან, რომ ალგებრული გეომეტრიიდან ცნობილი ე.წ. რეზულტანტებით ელიმინაციის პროცედურის დახმარებით, A -ს მაქსიმუმი შეიძლება გამოისახოს როგორც ცხადი ალგებრული განტოლების უდიდესი ნამდვილი ფესვი, რომელსაც გამოვტოვებთ.

ამგვარად, თეორემა 2.4 დამტკიცებულია.

შენიშვნა 2.5. ფართობის ექსტრემალური მაკავშირებელი ციკლები სამი კონცენტრული წრეწირსთვის შეისწავლებოდა ე.გუტკინის ზემოთხსენებულ სტატიაში [18], სადაც მოცემული იყო მაქსიმალური ციკლის გეომეტრიული დახასიათება ([18], თეორემა 1, დებულება 1.2). აღვნიშნოთ, რომ ე.გუტკინი არ ამტკიცებს ექსტრემუმების არაგადაგვარებულობას და საერთოდ არ ახსენებს უნაგირის ტიპის ორი კონფიგურაციის არსებობას. ამგვარად, ჩვენი თეორემა 2.4 აზუსტებს და განაზოგადებს ე. გუტკინის ხსენებულ შედეგებს. უფრო მეტიც, ასეთივე მეთოდების გამოყენებით შესაძლებელი გახდა ანალოგიური შედეგების მიღება ოთხი კონცენტრული წრეწირის შემთხვევაში. ამ გზით მიღებულ ძირითად ტოპოლოგიურ შედეგს ქვემოთ მოვიყვანთ 2.5 თეორემის სახით. ამ თეორემის დასამტკიცებლად დაგვჭირდება ლემა, რომელიც არის ფერმა-სნელიუსის ანალოგი ფართობისთვის და თავის დროს გამოყენებული იყო ჯ.შტაინერის (J.Steiner) მიერ იზოპერიმეტრული ამოცანის ამოხსნაში.

ლემა 2.2. (J.Steiner, იხ. მაგალითად, [43]). თუ წერტილი ისეთია, რომ სამკუთხედის ფართობი ღებულობს ექსტრემალურ მნიშვნელობას რკალზე, მაშინ $[AB]$ სეგმენტი პარალელურია რკალის მხებისა წერტილში.

აქედან უშუალოდ გამომდინარეობს სტაციონარული მაკავშირებელი ციკლის შემდეგი მნიშვნელოვანი მახასიათებელი თვისება. როგორც მიღებულია, მცირე დიაგონალს ვუწოდოთ ისეთი დიაგონალი, რომლის ბოლოებს შორის მდებარეობს მრავალკუთხედის მხოლოდ ერთი წვერო.

ლემა 2.3. სტაციონარული მაკავშირებელი ციკლის ყოველი მცირე დიაგონალი პარალელურია სათანადო წრეწირის მხების ციკლის შუალედურ წვეროში.

ამ შედეგის გამოყენებით დავამტკიცებთ შემდეგ თეორემას, რომელიც დისერტაციის ერთ-ერთი ძირითად შედეგს წარმოადგენს. თეორემის ჩამოყალიბებისთვის შემოვიტანოთ შემდეგი აღნიშვნები. რადიუსების მოცემულ ოთხეულს აღვნიშნავთ a, b, c, d , სადაც $0 < d < c < b < a$. გარე წრეწირზე დავაფიქსიროთ წერტილი $A(a; 0)$, დანარჩენი წერტილები კი აღვნიშნავთ B, C, D წრეწირების რადიუსების შესაბამისად. მაკავშირებელი $P = \langle ABCDA \rangle$ ციკლის ორიენტირებულ ფართობს აღვნიშნავთ $S(P)$. შემდგომში განვიხილავთ შემდეგ რვა წერტილს: $B_{\pm} = (0, \pm b)$, $C_{\pm} = (\pm c, 0)$, $D_{\pm} = (0, \pm d)$.

თეორემა 2.5. ოთხი კონცენტრული წრეწირის X სისტემის შემთხვევაში, S ორიენტირებული ფართობს სამგანზომილებიანი ტორის ჰომეომორფულ $\text{Conf}_0(X)$ რედუცირებულ კონფიგურაციულ სივრცეზე აქვს შემდეგი რვა სტაციონარული მაკავშირებელი ციკლი:

(1) $\langle AB_+C_-D_-A \rangle$, (2) $\langle AB_+C_-D_+A \rangle$, (3) $\langle AB_+C_+D_-A \rangle$, (4) $\langle AB_+C_+D_+A \rangle$,

(5) $\langle AB_-C_-D_-A \rangle$, (6) $\langle AB_-C_-D_+A \rangle$, (7) $\langle AB_-C_+D_+A \rangle$, (8) $\langle AB_-C_+D_-A \rangle$.

ამასთან, პირველი ციკლი მაქსიმალურია, მეხუთე ციკლი მინიმალურია, დანარჩენი ექვსი ციკლი კი არაგადაგვარებული უნაგირა ტიპის წერტილებია. (2)-(4) ციკლების მორსის ინდექსია 1, ხოლო (6)-(8) ციკლების მორსის ინდექსია 2.

დამტკიცება. განვიხილოთ ფართობის რომელიმე სტაციონარული ციკლი $P = \langle ABCDA \rangle$. ლემა 2.4 გამომდინარეობს, რომ P ოთხკუთხედის BC დიაგონალი უნდა იყოს გარე წრეწირის A წერტილში მხები წრფის პარალელური, რომელიც თვითონ Oy ღერძის პარალელურია. ამიტომ B და C წერტილებს ერთნაირი აბსცისები აქვთ. ამავე დროს, AD დიაგონალი უნდა იყოს B წერტილში მხები წრფის პარალელური, ანუ ეს მხები ჰორიზონტალური უნდა იყოს, რაც

შესაძლებელია მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როდესაც B წერტილი ეკუთვნის Oy ღერძს. ამიტომ ნებისმიერი სტაციონარული P ციკლის წვეროები ეკუთვნიან კოორდინატთა ღერძებს. აქედან კი უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ სტაციონარული ციკლების რაოდენობა უდრის რვას და ამათ აქვთ თეორემაში მითითებული (1)-(8). ამასთან ცხადია, რომ (1) ციკლის სიგრძე უდრის $\frac{1}{2}(a + c)(b + d)$ და იგი მაქსიმალურია. რადგან სტაციონარული ციკლების ყველა კოორდინატი ცხადი სახით მოცემულია, S ფუნქციის ჰესეს მატრიცის და ჰესიანის გამოთვლა ელემენტარული ხდება და ადვილად მოწმდება, რომ ისინი არაგადაგვარებულია და აქვთ ზუსტად ისეთი მორსის ინდექსები, როგორც მითითებულია თეორემაში. თეორემის დამტკიცება დასრულებულია.

სამგანზომილებიანი ტორის ტოპოლოგიის გათვალისწინებით მოყვანილი შედეგებიდან გამომდინარეობს შემდეგი დასკვნა, რომელიც საინტერესოა შესაძლო განზოგადების თვალსაზრისით.

წინადადება 2.4. სამი და ოთხი კონცენტრული წრეწირის შემთხვევაში ორიენტირებული ფართობი წარმოადგენს ზუსტ მორსის ფუნქციას რედუცირებულ კონფიგურაციულ სივრცეზე.

ამას მივყავართ შემდეგ საინტერესო ჰიპოთეზასთან, რისი დამტკიცება სერიოზული წინსვლა იქნებოდა გეომეტრიული ექსტრემალური ამოცანების დარგში.

ჰიპოთეზა. კომპლანარული კონცენტრული წრეწირების ნებისმიერი სისტემის შემთხვევაში ორიენტირებული ფართობი წარმოადგენს ზუსტ მორსის ფუნქციას რედუცირებულ კონფიგურაციულ სივრცეზე.

აღვნიშნოთ, რომ ამ ჰიპოთეზის ანალოგები შესწავლილი იქნა სახსრული მექანიზმების და მრავალკუთხედების ზოგიერთ კონფიგურაციულ სივრცისთვის [21], [22].

თავი 3. ფეინმანის მაშველის ამოცანის განზოგადების შესახებ

ამ თავში ჩვენ შევხებით კარგად ცნობილი ამოცანის, მაშველის ამოცანის ბუნებრივ განზოგადებას. ჩვენი მთავარი მიზანია, მივიღოთ ოპტიმალური გზის გეომეტრიული აღწერა და გადარჩენის მინიმალური დროის გამოთვლის ალგორითმი. ჩვენს მიერ მიღებული შედეგები შეიძლება განვიხილოთ, როგორც [30]-ის ძირითადი შედეგების განზოგადება.

დასაწყისისთვის გავიხსენოთ, რაში მდგომარეობს მაშველის კლასიკური ამოცანის არსი. განვიხილოთ ზედა და ქვედა ნახევარსიბრტყეები $H_{\pm} = \{\pm y > 0\}$ და ორი წერტილი $A(a, b) \in H_-$, $B(c, d) \in H_+$. ობიექტი („მაშველი“) იმყოფება A წერტილში, ხოლო გადასარჩენი პირი („მცურავი“) კი – B -ში. მაშველს შეუძლია მოძრაობა (სირბილი) H_- ნახევარსიბრტყეში w მაქსიმალური სიჩქარით, ამასთან, მისი მოძრაობის (ცურვის) მაქსიმალური სიჩქარე H_+ -ში არის v , $0 < v < w$. არაფორმალური ინტერპრეტაციით, Ox ღერძი არის გამყოფი ხაზი ზღვასა და ხმელეთს შორის, H_- არის ხმელეთი, H_+ კი – ზღვა. საძიებელია A -დან B -ში მისაღწევად საჭირო უმცირესი დრო.

კარგადაა ცნობილი, რომ მინიმალურ დროში გავლილი მანძილი – ეს არის ტეხილი $[AC] \cup [CB]$, რომელიც აკმაყოფილებს თანაფარდობას

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{w}{v}, \quad (3.1)$$

სადაც α არის კუთხე AC -სა და C წერტილში Ox ღერძისადმი გავლებულ ქვევით მიმართულ ნორმალს შორის, β კი არის კუთხე CB -სა და C წერტილში Ox ღერძისადმი გავლებულ ზევით მიმართულ ნორმალს შორის (იხ. [30]). ეს თანაფარდობა გეომეტრიულ ოპტიკაში ცნობილია, როგორც სნელიუსის რეფრაქციის კანონი. ამიტომ, C წერტილს, რომელიც აკმაყოფილებს (3.1) პირობას, ვუწოდებთ სნელიუსის წერტილს $S(D)$ მონაცემებით $D = (a, b, c, d; w, v)$.

სნელიუსის წერტილის C -ს აბსცისა შეიძლება გამოთვლილ იქნას, როგორც ფესვი კვადრატული განტოლებისა, რომლის კოეფიციენტები დამოკიდებულია D ვექტორზე. ამის შემდგომ, გადარჩენის მინიმალური დრო $T_*(D)$, ანუ A -დან B -ში მისაღწევად საჭირო უმცირესი დრო D მონაცემებით, შეიძლება გამოვსახოთ ცხადი სახის ანალიზური ფორმულით (3.7), რომელიც ქვემოთაა მოცემული. იგივე ამოცანა შეიძლება ჩამოყალიბებულ და ამოხსნილ იქნას ცხადი სახით, თუ ნახევარსიბრტყის (ზღვის) ნაცვლად გამოვიყენებთ წრეს (წრიული ფორმის ტბა ან საცურაო აუზი).

განზოგადება, რომლის განხილვასაც ვაპირებთ, შემდეგნაირად ყალიბდება: დავუშვათ, გადარჩენის სცენარში B სამიზნეს (მცურავი) შეუძლია მოძრაობა და მისი მაქსიმალური სიჩქარე u ნაკლებია v -ზე, რაც სრულიად ბუნებრივი დაშვებაა მცურავისა და მაშველის არაფორმალურ სიტუაციაში. ასევე, დავუშვათ, რომ მცურავს შეუძლია იცუროს მხოლოდ ფიქსირებული მიმართულებით, რომელსაც იგი ერთხელ აირჩევს და არ შეცვლის, სანამ მაშველი მასთან არ მიაღწევს. ჩნდება კითხვა, რა მიმართულება უნდა აირჩიოს მცურავმა და რა მინიმალურ დროში უნდა მიაღწიოს მაშველმა მცურავამდე, თუ დავუშვებთ, რომ მაშველისთვის ცნობილია მცურავის სიჩქარე და ცურვის მის მიერ არჩეული მიმართულება.

ამოცანა მიეკუთვნება *დიფერენციალური თამაშების თეორიას*. ამოცანის სპეციფიკა იმაში მდგომარეობს, რომ ორივე მონაწილე ცდილობს იმოქმედოს იმგვარად, რომ ერთმანეთს შეხვდნენ უმცირეს დროში, განსხვავებით *დევენის დიფერენციალური თამაშებისგან*, სადაც სამიზნე ობიექტი ცდილობს გაქცევას ან იმ დროის მაქსიმალურად გაჭიმვას, რა დროშიც მას მდევარი უნდა დაეწიოს. მთავარი ამოცანა შემდგომი შესწავლისთვის არის ის, თუ როგორი უნდა იყოს A -სა და B -ს ერთობლივი სტრატეგია, რათა ერთმანეთს შეხვდნენ დროის უმცირესი დანაკარგით არსებული შეზღუდვების ფონზე (მონაცემები D).

ამოცანის პირველი ვერსია უკავშირდება ბუნებრივ დაშვებას, რომ მცურავი მიემართება პირდაპირ ნაპირისკენ მაქსიმალური შესაძლო სიჩქარით u . ჩნდება კითხვა, ამ ვითარებაში რა მინიმალურ დროში გაივლის მაშველი მცურავამდე მანძილს და როგორ გამოვთვალოთ გადარჩენის მინიმალური დრო (დრო, რომელიც საჭიროა მცურავამდე მისაღწევად). მოვიყვანთ ამოცანის თეორიულ ამოხსნას გარკვეული შეზღუდვების პირობებში (თეორემა 3.1) და მოგაწვდით დეტალურ ინფორმაციას კონკრეტული შემთხვევისთვის.

ამოცანის მეორე ვერსია წარმოიქმნება, თუ მცურავი მიემართება პირდაპირ მაშველისკენ (სამაშველო პუნქტისკენ). ჩვენ ისევ და ისევ გვაინტერესებს მაშველის მიერ გავლილი მინიმალური მანძილი და მცურავამდე მისაღწევად საჭირო უმცირესი დრო. ბუნებრივად ჩნდება შემდგომი ამოცანა, შევადაროთ გადარჩენის მინიმალური დროის მნიშვნელობები აღნიშნულ ორ შემთხვევაში.

უფრო ზოგად შემთხვევებში, „კოორდინატორი“ გამოთვლის გადარჩენის დროის აბსოლუტურ მინიმუმს ორგანოზომილებიან ტორზე მცურავისა და მაშველის შესაძლო მიმართულებების პირობებში და ორივეს მიმართავს ოპტიმალური მიმართულებით. საინტერესოა, როგორი იქნება ეს მიმართულებები და როგორია გადარჩენის დრო ამ შემთხვევაში. ვაჩვენებთ, რომ უკანასკნელ შემთხვევაში ამონახსნის პოვნა შესაძლებელია უძრავი წერტილის განტოლებიდან (რომელიც ამოიხსნება იტერაციული ალგორითმის გამოყენებით).

3.1. მაშველის ამოცანის ზოგადი ანალიზური ამოხსნა

შემოვიღოთ რამოდენიმე აღნიშვნა და დაშვება. Ox ღერძი მივიჩნიოთ სანაპირო ზოლად. აღვნიშნოთ A წერტილის (სამაშველო პუნქტი) კოორდინატები $(0; a)$, ხოლო B (მცურავის) კოორდინატები $(p; b)$, სადაც $a; b; p$ – ფიქსირებული დადებითი რიცხვებია, რომლებსაც ამოცანის მონაცემები ეწოდება. სნელიუსის წერტილის C -ს x კოორდინატი აღვნიშნოთ x_c , რეფრაქციის კუთხეები α, β აღვნიშნოთ r, s . (3.1)-დან გვექნება

$$\frac{\sin r}{\sin s} = \frac{w}{v}, \quad \sin s = \frac{v}{w} \sin r, \quad (3.2)$$

T_c -თი აღვნიშნოთ დრო, რომლის განმავლობაშიც ხდება ABC ტეხილის გასწვრივ მანძილის გავლა.

$$T_c = \frac{|AC|}{w} + \frac{|CB|}{v}, \quad (3.3)$$

ასევე გვაქვს:

$$|AC| = \sqrt{a^2 + a^2 \tan^2 r} = \frac{a}{\sqrt{1 - \sin^2 r}},$$

$$|CB| = \sqrt{b^2 + b^2 \tan^2 s} = \frac{bw}{\sqrt{w^2 - v^2 \tan^2 r}}.$$

აქედან

$$T_c = \frac{a}{w\sqrt{1 - \sin^2 r}} + \frac{bw}{v\sqrt{w^2 - v^2 \sin^2 r}}, \quad (3.4)$$

დარჩა $\sin r$ -ის პოვნა. აღვნიშნოთ $z = \sin r$, მივიღებთ განტოლებას z -ის მიმართ:

$$\frac{az}{\sqrt{1 - z^2}} + \frac{bvz}{\sqrt{w^2 - v^2 z^2}} = p. \quad (3.5)$$

გავათავისუფლოთ განტოლება კვადრატული ფესვებისგან და შემოვიღოთ აღნიშვნა $t = z^2$, მივიღებთ მე-4 რიგის ალგებრულ განტოლებას t -ს მიმართ:

$$[p^2(1 - t)(w^2 - v^2 t) - a^2 t(w^2 - v^2 t - b^2 v^2 t(1 - t)^2)]^2 = 4a^2 b^2 v^2 t^2 (1 - t)(w^2 - v^2 t), \# \quad (3.6)$$

)

რომელსაც ვუწოდებთ ამოცანის მთავარ განტოლებას.

ყურადღება მივაქციოთ იმას, რომ გვჭირდება განტოლების მხოლოდ ის ფესვები, რომლებიც მოთავსებულნი არიან $(0; 1)$ ინტერვალში. ნამდვილ ფესვთა რაოდენობის გამოთვლის ერმიტის მეთოდის გამოყენებით შეგვიძლია შევამოწმოთ, რომ განტოლებას ყოველთვის აქვს ორი ნამდვილი ფესვი, რომელთაგან ერთი, $t_* \in (0; 1)$. ამგვარად, ქვედა კუთხე r გამოითვლება, როგორც $\sin^{-1} \sqrt{t_*}$ და მივიღებთ საბოლოო შედეგს.

ჩვენს აღნიშვნებში ამ ამოცანის ცნობილი ანალიზური ამოხსნა ყალიბდება შემდეგნაირად:

წინადადება 3.1. სნელიუსის წერტილის აბსცისა D მონაცემებით, როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, ტოლია $\frac{a\sqrt{t_*}}{\sqrt{1-t_*}}$, სადაც t_* არის (3.6) განტოლების ერთადერთი ფესვი $(0; 1)$ ინტერვალში.

უშუალო კვლევით მივიღებთ გადარჩენის მინიმალური დროის ცხადი სახის ფორმულას D მონაცემებით:

$$T_*(D) = \frac{a}{w\sqrt{1-t_*}} + \frac{bw}{v\sqrt{w^2-v^2t_*}}, \#(3.7)$$

სადაც t_* არის (3.6) განტოლების ერთადერთი ფესვი $(0; 1)$ ინტერვალში. ეს საშუალებას გვაძლევს წარმოვადგინოთ ფუნქცია $T_*(D)$, განსაზღვრული (3.7) ფორმულით. მეტიც, შესაძლებელია შემოწმდეს, რომ ფესვი t_* მარტივია. ამგვარად, პოლინომური განტოლების კოეფიციენტებზე მის ფესვთა დამოკიდებულების შესახებ ცნობილი თეორემების თანახმად მივიღებთ, რომ ეს ფუნქცია დიფერენცირებადია თავისი არგუმენტებით D მონაცემთა მთელ დიაპაზონზე.

3.2. მაშველის ამოცანის კერძო შემთხვევები

მოვახდინოთ წინადადება 3.1-ის ილუსტრირება ამოცანის კერძო შემთხვევისათვის, რომელიც განხილულია [26]-ში. [26]-ში გამოყენებული აღნიშვნების შესაბამისად, დავუშვათ, მცურავი იმყოფება $B(0; b)$ წერტილში, ხოლო მაშველის საწყისი წერტილია (სამაშველო პუნქტი) $A(x_a, -y_a)$, სადაც $x_a > 0$, $y_a > 0$. სწელიუსის წერტილი აღვნიშნოთ კოორდინატებით $(x_c, 0)$, (1)-ის თანახმად გვექნება

$$\frac{x_a - x_c}{\sqrt{(x_a - x_c)^2 + b^2}} = \frac{w}{v} \frac{x_c}{\sqrt{x_c^2 + b^2}}, \quad (3.8)$$

თუ $k = \frac{w}{v}$, სადაც, დაშვების თანახმად, $k > 1$, (3.8) ტოლობის კვადრატში აყვანით მივიღებთ ტოლობას

$$(x_c^2 + b^2)(x_a - x_c)^2 = k^2 x_c^2 [(x_a - x_c)^2 + b^2], \quad (3.9)$$

რომელიც მთავარი განტოლების (3.6) კერძო შემთხვევაა. ეს არის მე-4 ხარისხის განტოლება სამი პარამეტრით და შესაძლებელია მივიღოთ ზუსტი ინფორმაცია მისი ნამდვილი ფესვების რაოდენობის შესახებ და განვსაზღვროთ ისინი ნამდვილი ალგებრული გეომეტრიის სტანდარტული მეთოდების გამოყენებით. ვაგრძელებთ კერძო შემთხვევისთვის მეტი დეტალური ინფორმაციის მოწოდებას.

მაგალითი 3.1. განვიხილოთ (3.9)-ის კერძო შემთხვევა, როცა $b = -y_a = x_a/2 = p$. ამოვხსნათ მე-4 ხარისხის განტოლება x -ის მიმართ:

$$(k^2 - 1)x^4 - 4p(k^2 - 1)x^3 + 5p^2(k^2 - 1)x^2 + 4p^3x - 4p^4 = 0, \quad (3.10)$$

ავირჩიოთ $p = 1$ და გამოვიყენოთ დეკარტის წესი, რითაც მარტივად ვიპოვით ნამდვილ ფესვთა რაოდენობას.

ლემა 3.1. (3.10) განტოლებას გააჩნია ორი ნამდვილი ფესვი, რომელთაგან ერთი, x_* -ით აღნიშნული, ეკუთვნის $(0; 1)$ ინტერვალს.

კერძოდ, როცა $k = 1$, მივიღებთ $x = p$, რაც, ცხადია, ჭეშმარიტია. თუ გამოვთვლით x_* -ის წარმოებულს k პარამეტრით, შემოწმდება, რომ იგი უარყოფითია დადებით რიცხვთა ველზე. ამგვარად, x_* მონოტონურად კლებადია დადებითი k -ს ზრდასთან ერთად. მართლაც, თუ $x_*(k)$ -ს მიახლოებით მნიშვნელობებს გამოვთვლით რამოდენიმე მთელი k -სთვის, მივიღებთ: $x_*(2) = 0.462$, $x_*(3) = 0.3$, $x_*(4) = 0.223$. k -ს დიდი მნიშვნელობებისთვის სნელიუსის წერტილი მიისწრაფვის კოორდინატთა სათავისკენ, მაგ.: $k = 10$, მივიღებთ $x_*(10) = 0.098$. ფორმულა (3)-ის გამოყენებით შესაძლებელია მივიღოთ შემდგომი შედეგები მინიმალური დროისთვის, კერძოდ, გამოვთვალოთ კუთხეები r და s , როგორც k -ს ფუნქციები, რომელიც იძლევა იმავე გრაფიკს, რასაც [26]-ში. ასევე შესაძლებელია ვაჩვენოთ, რომ ფიქსირებული ჯამისთვის $v + w = S$, გადარჩენის დრო მინიმალურია, თუ $v = w = S/2$.

3.3. მაშველის განზოგადებული ამოცანა და იზოქრონები

ამ პარაგრაფში განვაზოგადებთ [30]-ის და პარაგრაფ 3.2-ის შედეგებს. ამისათვის აღვნიშნოთ $I_A(T)$ -ით ე.წ. მაშველის T -იზოქრონა, ყველა იმ წერტილთა სიმრავლე, რომლებსაც მაშველი მიაღწევს $A(a; b)$ -დან T დროში, მაგრამ ვერ მიაღწევს უფრო ადრე რაიმე $t < T$ მომენტში. დავუშვათ, მაშველი ყოველთვის მოძრაობს ოპტიმალური გზით, რომელიც განვსაზღვრეთ 3.2-ში. არაერთგვაროვან გარემოში სინათლის ტალღის გავრცელების მსგავსად, იმავე სიმრავლეს შეიძლება ვუწოდოთ *მაშველის ტალღური ფრონტი* T დროის შემდეგ ([5]). თუმცა, უმჯობესია გამოვიყენოთ ტერმინი იზოქრონა, რადგან ეს საშუალებას იძლევა გამოვთვალოთ იგი 3.2-ში მიღებული შედეგების გამოყენებით. ანალოგიურად განიმარტება მცურავის იზოქრონა $I_B(T)$. იზოქრონის გამოყენება თვალსაჩინოს

ხდის მსჯელობას და იძლევა მაშველის განზოგადებული ამოცანის გეომეტრიულ ამოხსნას.

შეგახსენებთ, რომ მცურავს შეუძლია ცურვა მუდმივი სიჩქარით $u > 0$ ნებისმიერი მიმართულებით, რომელიც უცვლელია გადარჩენის მთელი პროცესის განმავლობაში. ბუნებრივია დავუშვათ, რომ $u < v < w$. სინამდვილეში, ამოცანა რომ უფრო საინტერესო გახდეს, დავუშვათ, რომ მცურავს არ შეუძლია მიაღწიოს ნაპირის რომელიმე წერტილს მაშველზე ადრე. ამისათვის ვივარაუდებთ, რომ

$$\frac{c}{u} \geq \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{w}, \quad (3.11)$$

ლემა 3.2. თუ უტოლობა (3.11) სრულდება, მაშინ ნებისმიერი $x \in R$ -სთვის სრულდება

$$\frac{\sqrt{c^2 + x^2}}{u} \geq \frac{\sqrt{(a-x)^2 + b^2}}{w}. \quad (3.12)$$

დამტკიცება. უკანასკნელი უტოლობის ორივე მხარე დადებითია, ამიტომ კვადრატში აყვანით მივიღებთ უტოლობას

$$\frac{c^2 + x^2}{u^2} > \frac{(a-x)^2 + b^2}{w^2} \quad (3.13)$$

ახლა ჩვენი დაშვებები გულისხმობს $\frac{c^2}{u^2} \geq \frac{a^2 + b^2}{w^2}$ და $\frac{x^2}{u^2} > \frac{x^2}{w^2}$. აქედან

$$\frac{c^2 + x^2}{u^2} > \frac{a^2 + b^2 + x^2}{w^2} \geq \frac{(a-x)^2 + b^2}{w^2}. \quad (3.14)$$

შემდეგი ორი დასკვნა აშკარად აშკარაა:

ლემა 3.3. $T \leq \frac{c}{u}$ -სთვის იზოქრონა $I_B(T)$ არის წრეწირი რადიუსით uT და ცენტრით $B(0, c)$. $0 \leq T < -\frac{w}{u}$ -თვის $I_A(T)$ -ს თანაკვეთა ზედა ნახევარსიბრტყესთან H_+ გარიელია.

ლემა 3.4. $I_A(T)$ და $I_B(T)$ არ იკვეთებიან, როცა $T \in \left[\frac{c}{u}, -\frac{w}{u}\right]$.

ახლა ვაჩვენოთ, როგორია მაშველის განზოგადებული ამოცანის გეომეტრიული ამოხსნა იზოქრონის ტერმინებში. ლემა 3.3 ნიშნავს, რომ $T \leq c/u$ -სთვის, მცურავის იზოქრონა $I(B, T)$ არის წრეწირი, გამოსახული განტოლებით

$$x^2 + (y - c)^2 - u^2 T^2 = 0. \quad (3.15)$$

გაგრძელებაში მოვიყვანთ მაშველის იზოქრონის $I_A(T)$ -ს პარამეტრულ განტოლებებს, რომლებიც საშუალებას იძლევიან, რომ $I_A(T)$ და $I_B(T)$ იზოქრონების ორივე ოჯახი შედგებოდეს ჩალაგებული მკაცრად ამოხსნილი წირებისგან, რომლებიც განფენილია მთელ სიბრტყეზე. მეტიც, ლემა 3.4-ის მიხედვით, T -ს მცირე მნიშვნელობებისთვის, იზოქრონები $I_A(T)$ და $I_B(T)$ არ გადაიკვეთებიან. აქედან გამომდინარეობს, რომ არსებობს ერთადერთი განსაზღვრული უმცირესი დადებითი რიცხვი T_* ისეთი, რომ ორ იზოქრონას $I(A, T_*)$ და $I(B, T_*)$ აქვს არაცარიელი თანაკვეთა. ზემოთთქმულიდან გამომდინარეობს, რომ ეს თანაკვეთა $I_A(T_*) \cap I_B(T_*)$ შედგება მხოლოდ ერთი საერთო წერტილისგან M , ასე რომ, ეს ორი იზოქრონა ერთმანეთს ეხება M წერტილში. ახლა, ამოცანის დასმაში იზოქრონების განმარტებებიდან გამომდინარე, რიცხვი $T_* = T_*(D)$ არის გადარჩენის მინიმალური დრო და წერტილი $M = M(D)$ არის „ოპტიმალური შეხვედრის წერტილი“ მაშველის განზოგადებულ ამოცანაში D მონაცემებით. ეს დასკვნა საშუალებას გვაძლევს მივიღოთ მაშველის განზოგადებული ამოცანის ანალიზური ამონახსნი მსგავსად მაშველის კლასიკური ამოცანისა, რომელიც გადმოცემულია პარაგრაფ 3.2-ში.

ამის გათვალისწინებით ჩვენი შემდეგი მიზანია ანალიზური განტოლების მიღება T -იზოქრონის $I(A, T)$ თანაკვეთისთვის ზედა ნახევარსიბრტყესთან H_+ . ეს თანაკვეთა აშკარად ცარიელია $0 \leq T < -b/w$ -თვის, ამიტომ, ავიღოთ რიცხვი $T \geq -b/w$. ამის შემდეგ უნდა გამოვთვალოთ ბოლო წერტილთა $P(t)$ კოორდინატები T დროისთვის მაშველის ყველა ოპტიმალური გზისთვის, რომელთა დასასრულიც არის H_+ -ში. როგორც პარაგრაფ 3.2-ში დავადგინეთ, ყოველი ასეთი გზა განისაზღვრება მისი სწელიუსის წერტილით. ცხადია, $t < T$ -

სთვის სნელიუსის წერტილთა აბსცისები მდებარეობენ მონაკვეთზე $[a - \sqrt{w^2 T^2 - b^2}, a + \sqrt{w^2 T^2 - b^2}]$. ამ მონაკვეთის $(x; 0)$ წერტილამდე მიღწევას A -დან დაჭირდება t დრო ისეთი, რომ $t = \frac{\sqrt{(a-x)^2 + b^2}}{w} = \frac{\sqrt{w^2 t^2 - b^2}}{w}$. მოვახდინოთ სნელიუსის წერტილთა პარამეტრიზაცია, როგორც $S(t) = ((a - \sqrt{w^2 t^2 - b^2})/w, 0)$. ასეთი $S(t)$ წერტილის მიღწევის შემდეგ იზოქრონის $P(t)$ წერტილამდე მისაღწევად მაშველმა უნდა იცუროს მუდმივი v სიჩქარით „გარდატეხილი“ წირის გასწვრივ $T - t$ დროის განმავლობაში. ახლა $P(t)$ -ს კოორდინატების გამოთვლა მარტივია.

მართლაც, კუთხის სინუსი $[A, S(t)]$ მონაკვეთსა და Oy ღერძის უარყოფით ნაწილს შორის იქნება $\sqrt{w^2 t^2 - b^2}/wt$. ხოლო კუთხის სინუსი $[S(t), P(t)]$ გარდატეხილ მონაკვეთსა და Oy ღერძის დადებით ნაწილს შორის იქნება $v\sqrt{(w^2 t^2 - b^2)/w^2 t}$. ახლა კი მარტივად მივიღებთ, რომ წერტილის $P(t) \in I(A, T)$ კოორდინატები $(X_T(t), Y_T(t))$ მოიცემა განტოლებებით

$$\begin{cases} X_T(t) = a - \left(1 + \frac{v^2 T - v^2 t}{w^2 t}\right) \sqrt{w^2 t^2 - b^2} \\ Y_T(t) = \frac{v(T - t) \sqrt{w^4 t^2 - v^2 (w^2 t^2 - b^2)}}{w^2 t} \end{cases}, \quad (3.16)$$

შეჯამების შედეგად, მივიღეთ T -იზოქრონის $I(A, T)$ და ზედა ნახევარსიბრტყის თანაკვეთის მკაფიო პარამეტრიზაცია, რაც საშუალებას გვაძლევს გამოვიყვანოთ ცხადი სახის განტოლებები გადარჩენის მინიმალური დროისა და ოპტიმალური შეხვედრის წერტილისთვის ([38], [39], [40]).

თეორემა 3.1. T -იზოქრონის $I(A, T)$ ზედა ნახევარსიბრტყესთან H_+ თანაკვეთის პარამეტრული განტოლებები მოიცემა ფორმულით (3.16), როცა $t \in \left[-\frac{b}{w}, T\right]$.

შენიშვნა 3.1. შევნიშნოთ, რომ ფორმულა (3.16) წრფივია T -ს მიმართ. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, კოორდინატები $(X_T(t), Y_T(t))$ არიან T -ს აფინური ფუნქციები $F_i \cdot T + G_i$ ფორმით, სადაც ფუნქციები F_i, G_i ცხადი სახის ფუნქციებია პარამეტრებით $(a, b, c; w, v, u)$ (მონაცემები) მაშველის განზოგადებულ ამოცანაში.

ეს დაკვირვება საშუალებას გვაძლევს დავიყვანოთ მაშველის განზოგადებული ამოცანა ერთადერთი ალგებრული განტოლების ამოხსნაზე (3.17), რომელიც ჩაითვლება [30]-ში მოცემული მაშველის ამოცანის ანალიზური ამოხსნის ანალოგად.

შენიშვნა 3.2. როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, თუ გამოვიყენებთ ზემოთ მოყვანილ პარამეტრიზაციას, შესაძლებელია $I_A(T)$ -ს სიმრუდის გამოთვლა და შემოწმება, რომ ნებისმიერი $T > -b/w$ -სთვის დადებითია, და T -იზოქრონის $I_A(T)$ თანაკვეთა ზედა ნახევარსიბრტყესთან არის ამოხსნილი წირი. აუცილებელი გამოთვლები მარტივი და სტანდარტულია, ამიტომ მათ გამოვტოვებთ. ფაქტიურად, ცნობილია, რომ $I_A(T)$ -ს ამოხსნილობა ასევე გამომდინარეობს მისი ინტერპრეტაციიდან, როგორც ტალღური ფრონტი [7].

ეს დაკვირვებები და ფორმულები საშუალებას იძლევა, მივიღოთ ცხადი სახის განტოლება გადარჩენის მინიმალური დროისთვის და განვსაზღვროთ ოპტიმალური შეხვედრის წერტილის კოორდინატები. მივაქციოთ ყურადღება იმას, რომ ნამდვილად უნდა განვსაზღვროთ T_* და t -ს მნიშვნელობა, როგორც $M = M(t)$ პარამეტრიზაციაში (3.16), რომელიც აკმაყოფილებს ორ განტოლებას. პირველი განტოლება გამოსახავს იმ ფაქტს, რომ წერტილი კოორდინატებით (3.16) მდებარეობს $I_B(T)$ -ზე, რომელიც გამოისახება

$$X_T(t)^2 + (Y_T(t) - c)^2 - u^2 T^2 = 0, \quad (3.17)$$

მეორე განტოლება კი მიიღება $I_A(T)$ და $I_B(T)$ იზოქრონების $M(t) = X_T(t), Y_T(t)$ წერტილთან შეხების პირობით. ლემა 3.1-ის თანახმად, $I_B(T)$ წრეწირია, ამიტომ შეხების პირობა ასეთია:

$$X_T(t) \cdot \frac{\partial X_T(t)}{\partial t} + (Y_T(t) - c) \cdot \frac{\partial Y_T(t)}{\partial t} = 0. \quad (3.18)$$

განტოლება (3.18)-ში შემავალი კერძო წარმოებულები მარტივად გამოითვლება Maple-ს გამოყენებით. ამრიგად, გვაქვს ორი ცხადი სახის განტოლებისგან შემდგარი სისტემა (3.16) ორი ცვლადისთვის T და t . ამ სისტემის მნიშვნელოვანი თავისებურება იმაში მდგომარეობს, რომ ის დაიყვანება ერთ განტოლებაზე ერთი

ცვლადით t . ამისათვის, ჩავსვათ განტოლებათა სისტემიდან $X_T(t)$ და $Y_T(t)$ (3.17)-ში. შენიშვნა 3.2-ის ძალით, მარცხენა ნაწილი არის კვადრატული გამოსახულება T -ს მიმართ. ამრიგად, შესაძლებელია (3.17)-დან T გამოვსახოთ წრფივად და შევიტანოთ (3.18)-ში. მივიღებთ განტოლებას t ცვლადით. ვუწოდოთ მიღებულ განტოლებას განზოგადებული მთავარი განტოლება. Maple-ით მიღებული მისი ცხადი ფორმა ძალიან დიდია, ამიტომ აქ ვერ წარმოვადგენთ, თუმცა მოვიყვანოთ ნიმუში 3.2-ში. მეტიც, ზემოთ განხილულიდან გამომდინარეობს, რომ ამ განტოლების ერთადერთი ფესვი $t_* \in [-\frac{b}{w}, c/u]$ სეგმენტს.

თუ გამოვთვლით $X'_T(t), Y'_T(t), X''_T(t), Y''_T(t)$ და მიღებულ მნიშვნელობებს შევიტანთ სიმრუდის გამოსათვლელ ფორმულაში, მივიღებთ

$$\kappa = \frac{b^2 v}{t^3 w^2 (w^2 - v^2) + b^2 v^2 T'} \quad (3.19)$$

რადგან $w > v > 0$, მაშინ $\kappa > 0$, მაშასადამე, მაშველის იზოქრონა ამოზნექილი წირია.

3.4. სამაშველო დიაპაზონი და გადარჩენის არეები

ამ პარაგრაფში შევავსებთ [30]-ის და პარაგრაფ 3.2-ის შედეგებს მაშველის T -სამაშველო დიაპაზონის განსაზღვრით $R(A, T)$, რომელიც შედგება H_+ -ის იმ წერტილებისგან, რომლებსაც მაშველი მიაღწევს $A(0; a)$ -დან T დროში. აღვნიშნოთ $B(A, T)$ -ით $R(A, T)$ -ს საზღვარი, რომელიც შედგება იმ წერტილებისგან, რომლებსაც მაშველი მიაღწევს $A(0; -a)$ -დან ზუსტად T დროში. მჭიდროდ დაკავშირებული ცნებაა მცურავის T -გადარჩენის ზონა, $L_T(B)$, რომელიც მოიცავს ყველა იმ წერტილს H_- -ში, საიდანაც $B(0; b)$ წერტილამდე მიღწევა შესაძლებელია T დროის განმავლობაში. ცხადია, ეს სიმრავლე არის გაერთიანება *გადარჩენის მინიმალური დროის* (3.7) t -დონეებისა, როცა $0 < t < T$.

ამ სიმრავლეების ცოდნა უფრო მეტად თვალსაჩინოს ხდის ვითარებას და შესაძლებელია გამოყენებულ იქნას სანაპიროზე დამცავი სტრუქტურის

დაპროექტებისას. მათი განსაზღვრისთვის გამოვიყენებთ ანალოგიას მაშველის ოპტიმალურ გზასა და სინათლის სხივის რეფრაქციას შორის, რაც საშუალებას გვაძლევს, გამოვიყენოთ *ტალღური ფრონტის* ცნება გეომეტრიული ოპტიკიდან (იხ. [31]). რადგან ორივე მათგანი დაფუძნებულია (3.1) ფორმულაზე, მოსალოდნელი შედეგები და მათი დამტკიცება მოითხოვს მათემატიკურ სიმკაცრეს. გადამწყვეტი დაკვირვება იმაში მდგომარეობს, რომ $R(A, T)$ -ს საზღვარი $B(a, T)$ ემთხვევა რეფრაქციის ტალღურ ფრონტს კოეფიციენტით $k = w/v$, რომელიც ცნობილია, როგორც წრფის მონაკვეთი [30]. ამ დაკვირვების საფუძველზე მარტივად მივიღებთ შემდეგ შედეგს.

თეორემა 3.2. ნებისმიერი $a > 0$ -სთვის და ნებისმიერი $T > |a|/w$ -სთვის სიმრავლე $B(a, T)$ არის ორი მონაკვეთისგან შექმნილი ტეხილი, რომელიც ორ წერტილს $(\pm\sqrt{w^2T^2 - a^2}, 0)$ აკავშირებს წერტილთან $(0, v(Tw + a)/w)$.

დამტკიცება. ვინაიდან ცნობილია, რომ ტალღური ფრონტი პირველ მეოთხედში წრფეა, უნდა აღინიშნოს, რომ ეს წრფე გაივლის წერტილებზე $(0, v(Tw + a)/w)$ და $(\sqrt{w^2T^2 - a^2}, 0)$. მეორე მონაკვეთი Oy ღერძის სიმეტრიულია. აქედან გამომდინარეობს, რომ სიმრავლე $R(a, T)$ შედგება სამკუთხედთა გაერთიანებისგან

$$\left\{ \frac{x}{\sqrt{w^2T^2 - a^2}} + \frac{yw}{v(Tw + a)} \leq 1, x \geq 0, y \geq 0 \right\}.$$

და Oy ღერძის მიმართ მათი სარკული ანსახისგან.

თეორემა დამტკიცებულია.

T -გადარჩენის ზონების გამოთვლა შესაძლებელია იმავე გზით, ტალღური ფრონტის აგებით H_+ -დან H_- -ის მიმართულებით. გამოთვლის დეტალებს არ წარმოვადგენთ მათი სიმარტივის გამო.

3.5. ოპტიმალური სტრატეგიები მაშველის განზოგადებულ ამოცანაში

იმისათვის, რომ მივიღოთ მკაცრი შედეგები მაშველის ამოცანის განზოგადებაში, აუცილებელია, დამატებით აღვწეროთ მაშველისა და მცურავის სტრატეგია. მაშველის ბუნებრივი და, როგორც ჩანს, გონიერი სტრატეგია იმაში მდგომარეობს, რომ მას შემდეგ, რაც ის შეამჩნევს B -ს პოზიციას, სასწრაფოდ იწყებს მოქმედებას იმ ვარაუდით, რომ მცურავი რჩება B -ში მთელი მოქმედების განმავლობაში. ეს იმას ნიშნავს, რომ მაშველი იწყებს სირბილს w სიჩქარით სნელიუსის წერტილისკენ C , რაც განმარტებულია 3.2-ში, შემდეგ კი მიცურავს B -სკენ v სიჩქარით. ასევე, დავუშვათ, მცურავისთვის ცნობილია მაშველის სტრატეგია და მას შეუძლია C წერტილის განსაზღვრა. მაშასადამე, მისი საუკეთესო სტრატეგია იქნება ის, რომ მან იცუროს C -ს მიმართულებით.

გამოვთვალოთ, რამდენი დრო დაიზოგება უძრავი მცურავის სიტუაციასთან შედარებით. ჩვენთვის უკვე ცნობილია გადარჩენის მინიმალური დრო უკანასკნელ შემთხვევაში, რომელიც მოიცემა (3.7) ფორმულით. ასევე, ვიცით სნელიუსის წერტილი $C = C(D)$, რიცხვი $t_* = t_*(D)$ და მანძილები AC და BC . ბუნებრივი დაშვების თანახმად, რადგან u გაცილებით მცირეა v -სთან შედარებით, და მცურავს არ შეუძლია მიაღწიოს C წერტილამდე მაშველზე ადრე, ჩვენთვის ცხადია, რომ გადარჩენის დრო T_r წარმოადგენს ორი რიცხვის, t_1 და t_2 -ის ჯამს. აქ $t_1 = \frac{AC}{w}$, ანუ დრო, რომელიც საჭიროა მაშველის C -მდე მისაღწევად, იგივეა, რაც თეორემა 3.1-ში და შესაბამისად ტოლია $\frac{a}{w\sqrt{1-t_*}}$, ხოლო t_2 არის დრო t_1 -სა და შეხვედრის მომენტს შორის T_r . იმისათვის, რომ გამოვთვალოთ t_2 , ყურადღება უნდა მივაქციოთ იმას, რომ t_1 მომენტისთვის მანძილი C -დან მცურავის პოზიციამდე $B(t_1)$ არის $BC - v\frac{AC}{w}$. ამის შემდეგ მანძილი A -სა და B -ს შორის მცირდება $v + u$ სიჩქარით, ამიტომ

$$t_2 = \frac{|BC| - v\frac{|AC|}{w}}{u + v} = \frac{bw}{v(u + v)\sqrt{w^2 - v^2t_*}} - \frac{ua}{w(u + v)\sqrt{1 - t_*}}.$$

საბოლოოდ მივიღებთ

$$T_r = \frac{a}{w\sqrt{1-t_*}} + \frac{bw}{v(u+v)\sqrt{w^2-v^2t_*}} - \frac{au}{w(u+v)\sqrt{1-t_*}}, \quad (3.20)$$

და ბოლოს, (3.7)-სა და (3.20)-ს სხვაობით ვიპოვით მოგებულ დროს აღნიშნულ სცენარში.

წინადადება 3.2. მოგებული დრო პირველ სცენარში იგივეა, რაც მაშველის კლასიკურ ამოცანაში

$$\frac{bw}{v\sqrt{w^2-v^2t_*}} - \frac{bw}{v(u+v)\sqrt{w^2-v^2t_*}} + \frac{au}{w(u+v)\sqrt{1-t_*}}. \quad (3.21)$$

მეორე ბუნებრივი სცენარი მაშველის განზოგადებულ ამოცანაში ისაა, რომ, დაეუშვათ, მცურავი მყისიერად იწყებს ცურვას პირდაპირ ნაპირისკენ და მაშველისთვის ეს ცნობილია. მცურავის პოზიცია t დროის შემდეგ იქნება $(0; y_b - ut)$. ამოცანა არატრივიალურია, თუ მცურავი ვერ მიაღწევს ნაპირამდე უფრო ადრე, ვიდრე მაშველი მიაღწევს მცურავამდე. აღმოჩნდა, რომ პირველი სცენარის რამდენიმე მაგალითში განვითარდა გადარჩენის ნაკლები დრო, ვიდრე მეორეში, თუმცა, ბუნდოვანია, ყოველთვის ასე მოხდება თუ არა.

უფრო ზოგადი სცენარი (მესამე) უშვებს, რომ ორივე მონაწილე ირჩევს თავისი მოძრაობის მიმართულებას მხოლოდ ერთხელ მთელი პროცესის განმავლობაში და შემდეგ მიჰყვება გადარჩენის მინიმალური დროის სტრატეგიას. აშკარაა, რომ ორი ზემოთხსენებული დაშვება მესამე სცენარის კერძო შემთხვევებია. ბუნებრივი ამოცანა ახლა იმაში მდგომარეობს, რომ განვსაზღვროთ, რომელი მიმართულებაა ოპტიმალური იმ არსით, რომ გადარჩენის შესაბამისი დრო აღწევს აბსოლუტურ მინიმუმს ყველა შესაძლო ვარიანტთაგან. ცხადია, მარტივი არ არის ზოგადი ამონახსნის მიღება უკანასკნელ ამოცანაში, თუმცა, შეგვიძლია აღვწეროთ თეორიული ამონახსნი იმ დამატებითი პირობის გათვალისწინებით, რომ მაშველმა ყოველთვის იცის, რა მიმართულება აქვს მცურავს არჩეული.

აღვნიშნოთ φ -ით კუთხე ვერტიკალურ მიმართულებასა და მცურავის მიერ არჩეულ მიმართულებას შორის. მაშინ, შესაძლებელია ვიპოვოთ მაშველის ოპტიმალური სტრატეგია შემდეგნაირად: ვთქვათ, $t > 0$ დროის რაიმე მომენტი.

შემდეგ, ამ სცენარში მცურავის პოზიცია დროის t მომენტში არის $B(t) = (c - t \sin \varphi, d - t \cos \varphi)$. დავუშვათ, მაშველი წყვეტს მიაღწიოს ამ წერტილამდე მინიმალურ დროში. მაშინ, ფორმულა (3.7)-ის თანახმად, ეს დრო ტოლია $T_*(a, b, c - t \sin \varphi, d - t \cos \varphi; w, v)$. ცხადია, ეს სტრატეგია ოპტიმალური იქნება, თუ

$$T_*(a, b, c - t \sin \varphi, d - t \cos \varphi; w, v) = t, \quad (3.22)$$

რომელსაც უძრავი წერტილის განტოლებას ვუწოდებთ მაშველის განზოგადებული ამოცანისათვის. ამის მიზეზი ისაა, რომ ეს მართლაც უძრავი წერტილის განტოლებაა T_* -ის გარდაქმნისთვის დადებით ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეზე R_+ , დამოკიდებული პარამეტრებზე $(a, b, c, d; w, v)$. (3.6) კვადრატული განტოლების მარტივი ფესვის, t_* -ის დიფერენცირებადი დამოკიდებულებიდან პარამეტრებზე გამომდინარეობს, რომ T_* არის დიფერენცირებადი ასახვა R_+ -ისა თავის თავში, რომელიც დიფერენცირებადია პარამეტრებით $(a, b, c, d; w, v)$. მეტიც, კარგად განსაზღვრული ჩართული ცნებებიდან გამომდინარეობს, რომ T_* -ს უნდა ჰქონდეს ერთადერთი უძრავი წერტილი პარამეტრთა ნებისმიერი დასაშვები მნიშვნელობებისთვის. კერძოდ, ეს ნიშნავს, რომ T_* -ის უძრავი წერტილი შესაძლებელია მოიძებნოს იტერაციული მეთოდით და მოგვცეს ოპტიმალური სნელიუსის წერტილისა და გადარჩენის მინიმალური დროის გამოსათვლელი ალგორითმი.

ამჯერად უკვე შესაძლებელია ყველა ზემოთგანხილული შემთხვევების მინიმალურ დროთა შედარება. შევეცადოთ განვსაზღვროთ მაშველისა და მცურავის ერთობლივი ოპტიმალური სტრატეგია მოცემული პოზიციებისთვის. ეს გაკეთებული გვაქვს მაგალითი 1-ზე დაფუძნებულ რამოდენიმე ნიმუშში და წარმოდგენილია კარგი დამტკიცება შემდეგი დასკვნის სასარგებლოდ:

დასკვნა. ერთობლივი ოპტიმალური სტრატეგია არის ის სტრატეგია, როდესაც მაშველი და მცურავი მოძრაობას იწყებენ მაქსიმალური სიჩქარით მათი საწყისი პოზიციების სნელიუსის წერტილისკენ.

პრინციპში, შესაძლოა აღმოცენდეს მეტად ოპტიმალური სტრატეგია, მოქმედების რაღაც მომენტში მცურავი მიემართება მაშველის პოზიციისკენ, ხოლო მაშველი მოძრაობს მცურავის სნელიუსის წერტილისკენ და მისი მიმდინარე პოზიციისკენ. ეს სცენარი ესადაგება ე.წ. ციკლური დევნის ამოცანას (იხ. [7]), რომელიც, ჩვეულებრივ, საკმაოდ რთულია. მეტიც, მიმართულების მუდმივად ცვლა შეუსაბამოა მუდმივ მაქსიმალურ სიჩქარესთან და ცხადია, არარეალურია პრაქტიკული მიზნებისთვის, ამიტომ ჩვენ მას არ განვიხილავთ.

3.6. მაშველი და სამიზნე ობიექტი ერთსა და იმავე გარემოში

განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც ორივე ობიექტი, მაშველი და მცურავი, ერთსა და იმავე H_+ გარემოშია. მაშველი $A(0; a)$ საწყის წერტილშია, ხოლო მცურავი $B(b; c)$ წერტილში. წყალში მაშველის მოძრაობის მაქსიმალური სიჩქარე არის v , ხოლო ნაპირზე - $w(v; w)$. როგორი უნდა იყოს მაშველის მოძრაობის ტრაექტორია, რომ გადარჩენის დრო იყოს მინიმალური?

მაშველის მოძრაობის რომელი ტრაექტორია იქნება ოპტიმალური: 1) მაშველი პირდაპირ მიემართება მცურავისკენ; 2) მაშველი გაცურავს ნაპირისკენ, გაირბენს გარკვეულ მანძილ ნაპირზე და შემდეგ გაემართება მცურავისკენ?

პირველ შემთხვევაში გადარჩენის მინიმალური დროა

$$\tilde{T} = \frac{\sqrt{b^2 + (a - c)^2}}{v}, \quad (3.23)$$

მეორე შემთხვევაში, მაშველი მიემართება ნაპირის $(x_*; 0)$ წერტილისკენ, რისთვისაც საჭიროა დრო

$$T_1 = \frac{\sqrt{x_*^2 + a^2}}{v}, \quad (3.24)$$

აღნიშნული წერტილიდან მაშველი დაიწყებს მოძრაობას Ox ღერძის გასწვრივ $(s_*; 0)$ წერტილამდე. ამას კი დასჭირდება დრო

$$T_2 = \frac{s_* - x_*}{w}. \quad (3.25)$$

ამ წერტილიდან მცურავამდე მანძილის დასაფარად საჭირო დრო იქნება

$$T_3 = \frac{\sqrt{(b-s_*)^2 + c^2}}{v}, \quad (3.26)$$

გადარჩენისთვის საჭირო მინიმალური დრო იქნება $T = T_1 + T_2 + T_3$, საიდანაც

$$T = \frac{\sqrt{x_*^2 + a^2}}{v} + \frac{s_* - x_*}{w} + \frac{\sqrt{(b-s_*)^2 + c^2}}{v}, \quad (3.27)$$

მივიღეთ ორ პარამეტრზე, s_* და x_* , დამოკიდებული ფუნქცია. თითოეული პარამეტრით ფუნქციის დიფერენცირების შედეგად გვექნება

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial x_*} = \frac{x_*}{v\sqrt{x_*^2 + a^2}} - \frac{1}{w} \\ \frac{\partial T}{\partial s_*} = \frac{1}{w} - \frac{b-s_*}{v\sqrt{(b-s_*)^2 + c^2}} \end{cases}, \quad (3.28)$$

თუ ამოვხსნით განტოლებათა სისტემას

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial x_*} = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial s_*} = 0, \end{cases}$$

მივიღებთ

$$x_* = \frac{av}{\sqrt{w^2 - v^2}}, \quad s_* = b - \frac{cv}{\sqrt{w^2 - v^2}}.$$

შემდეგ მიღებულ მნიშვნელობებს შევიტანთ (3.27)-ში:

$$T = \frac{b}{w} + \frac{a+c}{vw} \sqrt{w^2 - v^2}. \quad (3.29)$$

შევადართ T და $\tilde{T}$, ანუ შევადართ $\frac{b}{w} + \frac{a+c}{vw} \sqrt{w^2 - v^2}$ და $\frac{\sqrt{b^2 + (a-c)^2}}{v}$.

რა მანძილზე უნდა იმყოფებოდეს ნაპირიდან მაშველი, რომ შესრულდეს პირობა $\hat{T} < \tilde{T}$?

თუ ამოვხსნით უტოლობას

$$\frac{b}{w} + \frac{a+c}{vw} \sqrt{w^2 - v^2} < \frac{\sqrt{b^2 + (a-c)^2}}{v}$$

a ცვლადის მიმართ, მივიღებთ:

თუ

$$a \in \left(0; \frac{1}{v^2} \left(bv\sqrt{w^2 - v^2} + 2cw^2 - cv^2 - 2w\sqrt{c^2(w^2 - v^2) + bcv\sqrt{w^2 - v^2}} \right) \right) \cup \left(\frac{1}{v^2} \left(bv\sqrt{w^2 - v^2} + 2cw^2 - cv^2 + 2w\sqrt{c^2(w^2 - v^2) + bcv\sqrt{w^2 - v^2}} \right); +\infty \right),$$

მაშინ $T < \tilde{T}$.

ხოლო, თუ

$$a \in \left(\frac{1}{v^2} \left(bv\sqrt{w^2 - v^2} + 2cw^2 - cv^2 - 2w\sqrt{c^2(w^2 - v^2) + bcv\sqrt{w^2 - v^2}} \right); \frac{1}{v^2} \left(bv\sqrt{w^2 - v^2} + 2cw^2 - cv^2 + 2w\sqrt{c^2(w^2 - v^2) + bcv\sqrt{w^2 - v^2}} \right) \right),$$

მაშინ მაშველი პირდაპირ მცურავისკენ უნდა გაემართოს.

ანუ,

$$a \in \left(0; \left(\frac{\sqrt{c(w^2 - v^2) + bv\sqrt{w^2 - v^2}} - \sqrt{cw}}{v} \right)^2 \right) \cup \left(\left(\frac{\sqrt{c(w^2 - v^2) + bv\sqrt{w^2 - v^2}} + \sqrt{cw}}{v} \right)^2; +\infty \right), \quad (3.30)$$

ან

a

$$\in \left[\left(\frac{\sqrt{c(w^2 - v^2) + bv\sqrt{w^2 - v^2}} - \sqrt{cw}}{v} \right)^2; \left(\frac{\sqrt{c(w^2 - v^2) + bv\sqrt{w^2 - v^2}} + \sqrt{cw}}{v} \right)^2 \right] \quad (3.31)$$

თეორემა 3.3. თუ მაშველი იმყოფება (3.31) ფორმულით მოცემულ ინტერვალში, ის პირდაპირ უნდა გაემართოს მცურავისკენ. თუ იგი იმყოფება (3.30) ფორმულით მოცემულ ინტერვალში, მაშინ მან უნდა გაცუროს ნაპირისკენ,

გაირბინოს გარკვეული მანძილი ნაპირზე და შემდეგ გაცუროს გადასარჩენი ობიექტისკენ.

თუ შევამოწმებთ მიღებულ შედეგს შემდეგი მნიშვნელობებისთვის: $b = 80, c = 60, v = 2, w = 6$, მივიღებთ, რომ თუ $a \in (11.2; 2481.2)$, მაშველი პირდაპირ უნდა გაემართოს მცურავისკენ, სხვა შემთხვევაში კი უნდა გაცუროს ნაპირისკენ, გაირბინოს გარკვეული მანძილი ნაპირზე და შემდეგ გაცუროს გადასარჩენი ობიექტისკენ.

3.7. იზოქრონების მეთოდი მოძრავი გადასარჩენი ობიექტის სიტუაციაში

დისერტაციის ბოლო პარაგრაფში განვიხილავთ ანალოგიურ ამოცანას იმ შემთხვევაში, როდესაც სამიზნე ობიექტი (მცურავი ან ნავი) მოძრავია და მაშველის მიზანია მიუახლოვდეს სამიზნე ობიექტს რაღაც ფიქსირებულ r მანძილზე, რომელსაც ამ კონტექსტში უძახიან კრიტიკულ რადიუსი. შევნიშნოთ, რომ ასეთი ამოცანა არის მეორე თავში ე.წ. განხილული დარაჯის ამოცანის ანალოგი, რომელშიც სამიზნე ფუნქცია არის დასახული მიზნის მიღწევის დრო. როგორც წინა პარაგრაფებში, ვიგულისხმობთ, რომ ორივე ობიექტი მოძრაობს სიბრტყეში, მაშველის მაქსიმალური სიჩქარე უდრის $v > 0$ და ობიექტი ან უძრავია, ან მას შეუძლია მოძრაობა ფიქსირებული მიმართულებით მუდმივი სიჩქარით $u < v$. როგორც აპოლონიუსის კლასიკურ ამოცანაში, ამ სიტუაციაში არსებობს აპოლონიუსის წრეწირის ანალოგი, რომლის დახმარებით შესაძლო ხდება ამოცანის ანალიზური ამოხსნა. დავუშვათ, რომ მაშველი A საწყის მომენტში იმყოფება $(-d; 0)$ წერტილში. მეორე ობიექტი B საწყის მომენტში იმყოფება კოორდინატთა სათავეში და იწყებს მოძრაობას მუდმივი u სიჩქარით ფიქსირებული მიმართულებით, რომლის პოლარული კუთხე უდრის $q > 0$.

განვსაზვროთ D სიმრავლე, როგორც ყველა ისეთი P წერტილის გაერთიანება, რომ მანძილების სხვაობა $dist(P, (-d, 0)) - dist(P, (0, 0))$ უდრის r . [42] ნაშრომში დამტკიცებულია, რომ D სიმრავლეს აქვს კომპაქტური ჩაკეთილი კომპონენტი Q ,

რომლის შიდა არე მოიცავს კოორდინატთა სათავეს და არ მოიცავს $(-d, 0)$ წერტილს. ამ კომპონენტს უწოდებენ აპოლონიუსის ოვალს ან კრიტიკულ ოვალს. [42] ნაშრომში დამტკიცებულია, რომ Q ოვალს აქვს შემდეგი პარამეტრიზაცია:

$$x(t) = \frac{(1 - k^2)t^2 + 2rt + r^2 - d^2}{2d},$$

$$y(t) = \sqrt{k^2 t^2 - \frac{[(1 - k^2)t^2 + 2rt + r^2 - d^2]^2}{4d^2}}.$$

სადაც $k = u/v < 1$.

ამასთანავე, [32] ნაშრომში დამტკიცებულია, რომ Q კრიტიკული ოვალი დიფერენცირებადი ამოზნექილი ჩაკეტილი წირია. ამიტომ კოორდინატთა სათავეზე გამავალ ყველა სხივს აქვს ცალსახად განსაზღვრული თანაკვეთის წერტილი Q ოვალთან. აღვნიშნოთ M -ით ცალსახად განსაზღვრული თანაკვეთის წერტილი B -ს მოძრაობის მიმართულების სხივისა Q ოვალთან. მაშინ, როგორც დამტკიცებულია იმავე [32] ნაშრომში, A -ს ოპტიმალრი სტრატეგიაა მაქსიმალური v სიჩქარით იმოძრაოს M -ის მიმართულებით სანამ მანძილი A -ს და B -ს შორის არ გახდება r .

ადვილი დასანახია, რომ M წერტილის კოორდინატების გამოთვლა დაიყვანება მეოთხე რიგის განტოლების ამოხსნაზე, რისთვის შეიძლება გამოვიყენოთ კარდანო-ფერარის ფორმულა, რაც მოგვცემს ანალიზურ გამოსახულებას დაჭერის მინიმალური T_* დროისთვის. ამგვარად, [32] ნაშრომში მიღებულია ამ ამოცანის ანალიზური ამოხსნა.

ჩვენ ახლა წარმოვადგენთ ამ შედეგის მიღების სხვა გზას იზოქრონის ცნების დახმარებით, რომლის გამოყენება შესაძლებელი აღმოჩნდა ამ ამოცანის განზოგადებისთვის ფეინმანის ტიპის დევნის ამოცანაში ორი გარემოს შემთხვევაში. ამ მიზნით ჯერ მოვიყვანოთ კიდევ რამდენიმე შედეგს აპოლონიუსის ოვალის შესახებ. უპირველეს ყოვლისა, მივიღებთ Q ოვალის განტოლებას დეკარტის კოორდინატებში. ამისთვის შევნიშნოთ, რომ t პარამეტრის ელიმინაცია

ზემოთმოყვანილი პარამეტრული განტოლებიდან ორდინატისთვის შეიძლება შემდეგი ჩასმის გამოყენებით:

$$t = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{k}.$$

ამ გამოსახულებას ჩავსვამთ აბსცისის პარამეტრულ განტოლებაში და მივიღებთ, რომ Q ოვალის ცხადი სახის განტოლებას დეკარტის კოორდინატებში აქვს შემდეგი სახე:

$$4k^2r^2(x^2 + y^2) - [2k^2x - (1 - k^2)(x^2 + y^2) - k^2(r^2 - d^2)]^2 = 0.$$

ადვილად მოწმდება, რომ ეს განტოლება განსაზღვრავს მეოთხე რიგის სიბრტყით წირს, რომლის კომპაქტური კომპონენტი ემთხვევა Q ოვალს. ამიტომ ეს განტოლება შეიძლება შემდეგნაირად გამოვიყენოთ T_* დროს გამოსათვლელად. ამისთვის ჩავსვამთ ამ განტოლებაში საძებნი M თანაკვეთის წერტილის კოორდინატები ($uT_* \cos q$, $uT_* \sin q$) და მივიღებთ მეოთხე რიგის განტოლებას T_* -თვის. დეკარტის ნიშნების კანონის დახმარებით ადვილად მოწმდება, რომ ამ განტოლებას აქვს ერთადერთი დადებითი ფესვი, რის შემდეგ კარდანო-ფერარის ფორმულის სტანდარტული გამოყენებით მივიღებთ ამ ფესვის ზუსტ გამოსახულებას:

$$T_* = \frac{du \cos q - vr + \sqrt{(du \cos q - vr)^2 - (v^2 - u^2)(r^2 - d^2)}}{v^2 - u^2}.$$

M თანაკვეთის წერტილის კოორდინატები კი ტოლია ($uT_* \cos q$, $uT_* \sin q$) და A ობიექტის ოპტიმალური მიმართულების s კუთხე მოცემულია ფორმულით:

$$s = \arctan\left(\frac{uT_* \sin q}{d + uT_* \cos q}\right).$$

ამგვარად, ჩვენ მივიღეთ ამოცანის ანალიზური ამოხსნა, რომელიც ეთანხმება [32] მიღებულ შედეგებს. შემდეგი ამოცანის ანალიზის მიზნით აღვნიშნოთ, რომ T_* დაჭერის მინიმალური დრო შეიძლება უფრო მარტივად გამოვთვალოთ იზოქრონის ცნების გამოყენებით. ამისთვის შევნიშნოთ, რომ $I_t(A)$ იზოქრონა ამ

შემთხვევაში არის უბრალოდ vt რადიუსის წრეწირი ცენტრით $(-d, 0)$ წერტილში. დაჭერა ხდება იმ მომენტში, როდესაც მანძილი $B(t)$ და $I_t(A)$ შორის უდრის d -ს. ამ პირობიდან უშუალოდ გამომდინარეობს განტოლება T_* -თვის, რომლის ფესვი უდრის ზემოთმოყვანილ გამოსახულებას. იმ მოსაზრებას, რომ დაჭერის მომენტში მანძილი $B(t)$ და $I_t(A)$ იზოქრონას შორის უდრის d -ს, გამოვიყენებთ განზოგადებული ამოცანის ანალიზური ამოხსნის მისაღებად.

განზოგადებული ამოცანის პირობები შემდეგია: A ობიექტი საწყის მომენტში იმყოფება კოორდინატთა სათავეში და მისი მაქსიმალური სიჩქარე Ox ღერძზე უდრის $w > v > u$, ხოლო B ობიექტი მოძრაობას იწყებს (c, d) წერტილიდან, სადაც $c > 0, d > 0$. შევნიშნოთ რომ ამ პირობებში A ობიექტის იზოქრონები დადგენილია დისერტაციის 3.3 პარაგრაფში. კერძოდ, იზოქრონის ნაწილი მახასიათებელი Z სხივის ქვევით არის L_t წრფის სეგმენტი, სადაც Z სხივის საკუთხო კოეფიციენტი უდრის $\frac{\sqrt{w^2 - v^2}}{v}$, ხოლო L_t წრფის განტოლება შემდეგია:

$$vx + y\sqrt{w^2 - v^2} - vwt = 0.$$

თავიდან სიმარტივისთვის დავუშვებთ, რომ B ობიექტის ტრაექტორია მთლიანად არის Z სხივის ქვევით. მაშინ დაჭერის მინიმალური დრო განისაზღვრება იმ პირობით, რომ მანძილი $B(t)$ წერტილსა და L_t წრფის შორის უდრის r -ს. ცნობილი ფორმულა მანძილისთვის წერტილსა და წრფის შორის ამ სიტუაციაში გვაძლევს შემდეგ განტოლებას დაჭერის მინიმალური დროისთვის:

$$\frac{cv + uvt \cos q + d\sqrt{w^2 - v^2} + utsin q \sqrt{w^2 - v^2} - vwt}{w} = r.$$

ამ განტოლების ამოხსნით მივიღებთ შემდეგ ფორმულას, რომელიც ამ პარაგრაფის ძირითადი შედეგია და ამავედროულად თეორემა 3.2 განზოგადება არანულოვანი კრიტიკული რადიუსის შემთხვევაში.

თეორემა 3.4. ზემოთმოყვანილ პირობებში დაჭერის მინიმალური დრო გამოისახება ფორმულით:

$$T_* = \frac{rw - dv - c\sqrt{w^2 - v^2}}{uv \cos q - vw + u \sin q \sqrt{w^2 - v^2}}.$$

ამ ფორმულიდან კი მარტივად დავადგენთ სნელიუსის წერტილის კოორდინატებს და ოპტიმალურ სტრატეგიას, რაც აძლევს განხილული ამოცანის ანალიზურ ამოხსნას. შემთხვევა, როდესაც ობიექტის იზოქრონა გადადის მახასიათებელი სხივის ზევით, განიხილება ანალოგიურად.

დავამატებთ, რომ ანალოგიურად შეისწავლება აპოლონიუსის დევნის ამოცანა არანულოვანი კრიტიკული რადიუსის და რამდენიმე მოძრავი სამიზნე ობიექტის შემთხვევაში, რომელიც ერთდროულად აზოგადებს ამ პარაგრაფში შესწავლილ ამოცანას და დიზიუნქტური წრეწირების მინიმალური მაკავშირებელი ციკლის ამოცანას, რომელიც განიხილებოდა მეორე თავში. ამგვარად, ორივე თავში განხილული ამოცანები მჭიდრო კავშირში არიან და მათი გამოკვლევისთვის გამოყენებულ მეთოდების დახმარებით შეიძლება მიღებული შედეგების შემდგომი განზოგადება.

თავი 4. დასკვნა

ნაშრომში განხილულია რამდენიმე გეომეტრიული ექსტრემალური ამოცანა სიბრტყის რამდენიმე წრეწირზე წერტილთა კონფიგურაციისთვის, კერძოდ, ოპტიმალური მაკავშირებელი ციკლების ამოცანა კონცენტრული წრეწირებისთვის. ასევე განხილულია ფეინმანის მაშველის ამოცანის

სახელწოდებით ცნობილი პრობლემის განზოგადება მოძრავი სამიზნე ობიექტის შემთხვევისთვის. მიღებულია შემდეგი ძირითადი შედეგები.

1. მაკავშირებელი ციკლების შესახებ კონცენტრულ წრეწირთა ტიპური სიმრავლისთვის დავამტკიცეთ, რომ გაწრფელებული კონფიგურაციები არაგადაგვარებული სტაციონარული ციკლებია.

2. დავამტკიცეთ, რომ სამი კონცენტრული წრეწირისთვის L ფუნქციას აქვს ზუსტად ექვსი არაგადაგვარებული კრიტიკული წერტილი: ორი მაქსიმუმი (ინდექსი 2), სამი უნაგირის წერტილი (ინდექსი 1) და ერთი მინიმუმი (ინდექსი 0);

3. დავადგინეთ, რომ ზოგიერთი ოთხი კონცენტრული წრეწირებისთვის პერიმეტრს აქვს ათი არაგადაგვარებული სტაციონარული კონფიგურაცია: ერთი მინიმუმი, ორი სხვადასხვა ტიპის შვიდი უნაგირის წერტილი და ორი მაქსიმუმი;

4. მივიღეთ პერიმეტრის მაქსიმუმის გამოსათვლელი ფორმულა ოთხი კონცენტრული წრეწირისთვის;

5. მივიღეთ ანალოგიური შედეგები ორიენტირებული ფართობისთვის;

6. მივიღეთ პარამეტრული განტოლებები მაშველის იზოქრონისთვის;

7. დავადგინეთ, რომ მაშველისა და მცურავის ერთობლივი ოპტიმალური სტრატეგია არის ის სტრატეგია, როდესაც ისინი მოძრაობას იწყებენ მაქსიმალური სიჩქარით მათი საწყისი პოზიციების სნელიუსის წერტილისკენ;

8. მაშველისა და მცურავის ოპტიმალური საერთო სტრატეგიის შესასწავლად განვახილეთ იზოქრონების მეთოდი და ვაჩვენეთ, რომ ამავე მეთოდით ამოიხსნება აპოლონიუსის დევნის ამოცანის ტიპის პრობლემა;

9. დავადგინეთ, სხვადასხვა სიტუაციაში რა მიმართულება უნდა აირჩიოს მაშველმა, რათა გადარჩენისთვის საჭირო დრო მინიმალური იყოს;

10. გამოვთვალეთ მაშველის იზოქრონის სიმრუდე და დავამტკიცეთ, რომ მაშველის იზოქრონა ამოზნექილი წირია;

11. მივიღეთ ფეინმანის ამოცანის ანალიზური ამოხსნა არანულოვანი დაჭერის რადიუსის შემთხვევაში.

სადოქტორო ნაშრომში მიღებული შედეგების საფუძველზე შესაძლებელია:

1. მეორე თავში მიღებული შედეგების განზოგადება n განცალკევებულ ან კონცენტრულ წრეწირებზე;
2. ზუსტი შეფასებების პოვნა კრიტიკული შემაერთებელი ციკლების რაოდენობისთვის n არათანამკვეთი წრეწირებისთვის;
3. ექსტრემალური მაკავშირებელი ციკლების სიგრძისა და ფართობის გამოთვლა ამ მნიშვნელობების შეფასება n კონცენტრული წრეწირებისთვის რადიუსით $1, 2, \dots, n$ და მათი ასიმპტოტების პოვნა, როდესაც $n \rightarrow \infty$.
4. კრიტიკული ციკლების ბიფურკაციების და მათი სიგრძის შესწავლა მოცემული წრეწირების ცენტრების გადაადგილების პირობებში;
5. კრიტიკული ციკლების რაოდენობისა და სიგრძის შეფასება ჩალაგებული წრეწირებისთვის და ელიფსებისთვის.

ლიტერატურა

1. Agrachev, A.: Topology of quadratic maps and Hessians of smooth maps. J. Sov. Math., **49** (3), 990-1013 (1990)
2. Agrachev, A., Gamkrelidze, R.: Quadratic mappings and smooth vector-functions. Euler characteristics of level sets. J. Sov. Math., **55** (1), 1892-1928 (1991)
3. Arnol'd, V.: Catastrophe theory. Nauka. Moscow (1996) (in Russian)

4. Arnol'd, V., Varchenko, A., Gusein-Zade, S.: Singularities of Differentiable Mappings. Moscow (2005)
5. Arnol'd, V.: Singularities of wavefronts and caustics. Fizmatgiz, Moscow. (1996) (in Russian)
6. Avksentyev, E., Protasov, V.: Universal measure for Poncelet-type theorems. Proc. Amer. Math. Soc. **146**, 4843-4854 (2018)
7. Behrooz, F., Gagnon, R.: Cyclic pursuit in a plane. J. Math. Phys. **20** (11), 2212-2216 (1979)
8. Berger, M.: Geometry. I, Springer-Verlag (2009)
9. Bohr, N.: On the constitution of atoms and molecules, Phil. Mag. **26**, 476-502 (1913)
10. Braß, P., Rote, G., Swanepoel, K.J.: Triangles of extremal area or perimeter in a finite planar point set. Discrete Comput. Geom. **26**, №1, 2001, 51-58
11. Caruso, F., Oguri, V.: Bohr's atomic model revisited. Concepts of Physics, Vol. VI, №2, (2009), 139-162
12. Chen, G., Ding, Z., Hsu, S., Kim, M.: Mathematical analysis of a Bohr atom model. J. Math. Phys. №2 (2006). DOI: 10.1063/1.2168396
13. Dubrovin, B., Novikov, S., Fomenko, A.: Modern Geometry. Nauka, Moscow (1978) (in Russian)
14. Fomenko, A.: Topological variational problems. Moscow State University, Moscow (1984) (in Russian)
15. Fomenko, A.: Variational methods in topology. Nauka, Moscow (1982) (in Russian)
16. Gazizov, R.: On the maximum and minimum areas of the necklace. Lobachevskii J. Math. **44** (10), 4523-4530 (2023)
17. Gurov, M., Volkov, M.: Chains of tangent circles inscribed in curvilinear triangles. Int. J. Geom. **7** (1), 105- 118 (2018)
18. Gutkin, E.: Extremal triangles for a triple of concentric circles. Preprint IHES/M/03/46, 2003. 16 p.

19. Hassell, C., Rees, E.: The index of constrained critical point. *Amer. Math. Monthly.* **100** (8), 772–778 (1993)
20. Josefsson, M.: On the inradius of a tangential quadrilateral. *Forum Geometricorum*, 10(2010), 27–34
21. Khimshiashvili, G.: Algebraic formulae for topological invariants. *Proc. A. Razmadze Math.Inst.*, **125**, 1–121 (2001)
22. Khimshiashvili, G.: New applications of algebraic formulae for topological invariants. *Georgian Math. J.* **11** (4), 759–770 (2004)
23. Khimshiashvili, G., Siersma, D.: Critical configurations of planar multiple penduli. *J. Math. Sci.* **195** (2), 198 – 212 (2020)
24. Khimshiashvili, G., Panina, G., Siersma, D.: Extremal areas of polygons with fixed perimeter. *J. Math. Sci.* **247**, 731–737 (2020)
25. Khimshiashvili, G., Sazandrishvili, N.: Extremal problems for framed polygons. *Proc. I. Vekua Inst. Appl. Math.* **66**, 33–40 (2016)
26. Kirajiev, K.: Investigation of Steiner porism using Moebius transformations. *Mathematics Today.* **6**, 1–3 (2017)
27. Kot, M.: *A first course in the calculus of variations.* AMS, Seattle (2014)
28. Krasnosel'skij, M., Zabreiko, P.: *Geometric methods of nonlinear analysis.* Nauka, Moscow (1975) (in Russian)
29. Lagarias, J., Mallows, C., Wilks, A.: Beyond the Descartes circle theorem. *Amer. Math. Monthly.* **109** (4), 338– 361 (2001)
30. De Luca, R., Di Mauro, M., Naddeo, A.: Analytic solution of the lifeguard problem. *Phys. Educ.* 1–3, **53** (2018)
31. Mahajan, V.: *Fundamentals of geometrical optics.* SPIE Press (2014)
32. Pak, I.: *Lectures on Discrete and Polyhedral Geometry.* University of California, Los Angeles (2010).

33. Pedoe, D.: Geometry: A Comprehensive Course. Cambridge Univ. Press. Cambridge (1970)
34. Petrosjan, L., Rikhsiev, B.: Pursuit on the plane. Nauka, Moscow (1991) (in Russian)
35. Radic, M.: An improved method for establishing Fuss' relations for bicentric polygons. C. r. Acad. Sci. Ser. **384** (1), 415- 417 (2010)
36. Robbins, D.: Areas of polygons inscribed in a circle. Discr. Comput. Geom., **12**, 223–236 (1994)
37. Sazandrishvili, N.: Extremal connectors for disjoint circles. J. Math. Sciences. N.Y. **237** (1). 147- 156 (2019)
38. Sazandrishvili, N.: On a generalized lifeguard problem. Proc. I. Vekua Inst. Appl. Math. **70**, 49- 55 (2020)
39. Sazandrishvili, N.: On generalizations of lifeguard problem. Proc. I. Vekua Inst. Appl. Math. **71**, 38- 49 (2021)
40. Sazandrishvili, N.: On generalized lifeguard problem. Georgian Math. J. **31** (1), 129-138 (2024)
41. Svidzinsky, A., Scully, M., Herschbach, D.: Bohr's 1913 molecular model revisited. Proc. Nat. Acad. Sci. (USA) **102** (2005), 11985-11988
42. Wasz, P.: Two-on-one pursuit with a non-zero capture radius. Thesis, Air Force Institute of Technology, Ohio, USA, 1-68 (2019)
43. Young, L.: Lectures on the Calculus of Variations and Optimal Control Theory, Philadelphia (1969)
44. აღშიზია, ე.: დიფერენციალური გეომეტრია. ლექციების კურსი. თბილისი (1980)
45. ბალაძე, ვ.: ტოპოლოგია. შოთა რუსთაველის ბათუმის სახელმწიფო უნივერსიტეტი, ბათუმი (2016)
46. გამყრელიძე, რ.: ლექციები ოპტიმალური მართვის თეორიაში. ილიას სახელმწიფო უნივერსიტეტი, თბილისი (2020)

47. ქარცივაძე, ი.: მათემატიკური ანალიზი. თბილისი (1980)
48. ჭელიძე, ვ., წითლანაძე, ე.: უმაღლესი მათემატიკა. ტ.3. თბილისი (1977)
49. ხარაზიშვილი, ა.: მათემატიკური ეტიუდები. ილიას სახელმწიფო უნივერსიტეტი, თბილისი (2022)
50. ხიმშიაშვილი, გ.: დაკარგულ ფესვთა ძიებაში. ილიას სახელმწიფო უნივერსიტეტი, თბილისი (2010)
51. https://en.wikipedia.org/wiki/Quartic_function

